

# Gausselimination

## Steg-för-steg-demonstration

Hillevi Gavel

Institutionen för matematik och fysik (IMa)  
Mälardalens högskola (MDH)

11 april 2006

# Gausselimination

## Inledning

Detta bildspel riktar sig till personer som har läst om gausselimination och som skulle vilja se lite mer i detalj hur man gör i praktiken, och i vilken ordning man skriver saker.

Om du inte känner till begreppet så bör du ta och läsa in dig på det innan du kör spelet.

# Gausselimination

Vad är det?

Gausselimination är en systematisk och effektiv metod för att lösa linjära ekvationssystem.

# Gausselimination

Vad är det?

Gausselimination är en systematisk och effektiv metod för att lösa linjära ekvationssystem.

Att lösa ekvationer kan liknas vid att städa. Om man arbetar osystematiskt finns alltid risken att man i varje steg städar fram en sak till genom att begrava en annan.

# Gausselimination

Vad är det?

Gausselimination är en systematisk och effektiv metod för att lösa linjära ekvationssystem.

Att lösa ekvationer kan liknas vid att städa. Om man arbetar osystematiskt finns alltid risken att man i varje steg städar fram en sak till genom att begrava en annan.

Arbetsgången vid Gausselimination är så upplagd att man aldrig förstör något som man redan ordnat. Och i varje steg städar man upp något. Detta garanterar att man blir klar förr eller senare.

# Gausselimination

## Hur man gör

I den här beskrivningen utgår vi från att ekvationssystemet är skrivet på matrisform.

# Gausselimination

## Hur man gör

I den här beskrivningen utgår vi från att ekvationssystemet är skrivet på matrisform.

## Vad får man göra?

- ▶ Man får byta plats på två rader.
- ▶ Man får multiplicera en rad med ett tal (inte med talet 0).
- ▶ Man får lägga en multipel av en rad till en annan rad.

# Gausselimination

## Hur man gör

I den här beskrivningen utgår vi från att ekvationssystemet är skrivet på matrisform.

## Vad får man göra?

- ▶ Man får byta plats på två rader.
- ▶ Man får multiplicera en rad med ett tal (inte med talet 0).
- ▶ Man får lägga en multipel av en rad till en annan rad.

## Vart vill man komma?

Man vill få en matris av den här typen:

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & \text{ett tal} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \text{ett tal} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \text{ett tal} \end{array} \right]$$

# Gausselimination

Hur man gör

Hur kommer man dit?

# Gausselimination

Hur man gör

## Hur kommer man dit?

- ▶ Man fixar 1:an först i första raden, antingen genom att multiplicera raden med något eller genom att byta plats på ett par rader.

# Gausselimination

Hur man gör

## Hur kommer man dit?

- ▶ Man fixar 1:an först i första raden, antingen genom att multiplicera raden med något eller genom att byta plats på ett par rader.
- ▶ Man fixar 0:or under denna 1:a, genom att addera lämpliga multiplar av första raden till de nedanför.

# Gausselimination

Hur man gör

## Hur kommer man dit?

- ▶ Man fixar 1:an först i första raden, antingen genom att multiplicera raden med något eller genom att byta plats på ett par rader.
- ▶ Man fixar 0:or under denna 1:a, genom att addera lämpliga multiplar av första raden till de nedanför.
- ▶ Man fixar 1:an i andra raden på samma sätt.

# Gausselimination

Hur man gör

## Hur kommer man dit?

- ▶ Man fixar 1:an först i första raden, antingen genom att multiplicera raden med något eller genom att byta plats på ett par rader.
- ▶ Man fixar 0:or under denna 1:a, genom att addera lämpliga multiplar av första raden till de nedanför.
- ▶ Man fixar 1:an i andra raden på samma sätt.
- ▶ Man fixar 0:or under denna 1:a.

# Gausselimination

Hur man gör

## Hur kommer man dit?

- ▶ Man fixar 1:an först i första raden, antingen genom att multiplicera raden med något eller genom att byta plats på ett par rader.
- ▶ Man fixar 0:or under denna 1:a, genom att addera lämpliga multiplar av första raden till de nedanför.
- ▶ Man fixar 1:an i andra raden på samma sätt.
- ▶ Man fixar 0:or under denna 1:a.
- ▶ Och så vidare, tills det inte finns några rader kvar.

# Gausselimination

Hur man gör

## Hur kommer man dit?

- ▶ Man fixar 1:an först i första raden, antingen genom att multiplicera raden med något eller genom att byta plats på ett par rader.
- ▶ Man fixar 0:or under denna 1:a, genom att addera lämpliga multiplar av första raden till de nedanför.
- ▶ Man fixar 1:an i andra raden på samma sätt.
- ▶ Man fixar 0:or under denna 1:a.
- ▶ Och så vidare, tills det inte finns några rader kvar.

Detta är Gaussdelen av arbetet. Om man fortsätter att arbeta med matrisen så kallas det *Gauss-Jordans* metod.

# Gausselimination

Hur man gör

## Hur kommer man dit?

- ▶ Man fixar 1:an först i första raden, antingen genom att multiplicera raden med något eller genom att byta plats på ett par rader.
- ▶ Man fixar 0:or under denna 1:a, genom att addera lämpliga multiplar av första raden till de nedanför.
- ▶ Man fixar 1:an i andra raden på samma sätt.
- ▶ Man fixar 0:or under denna 1:a.
- ▶ Och så vidare, tills det inte finns några rader kvar.

Detta är Gaussdelen av arbetet. Om man fortsätter att arbeta med matrisen så kallas det *Gauss-Jordans* metod.

- ▶ Man fixar 0:or ovanför 1:an i nedersta raden, genom att addera lämpliga multiplar av den raden till de ovanför.

# Gausselimination

Hur man gör

## Hur kommer man dit?

- ▶ Man fixar 1:an först i första raden, antingen genom att multiplicera raden med något eller genom att byta plats på ett par rader.
- ▶ Man fixar 0:or under denna 1:a, genom att addera lämpliga multiplar av första raden till de nedanför.
- ▶ Man fixar 1:an i andra raden på samma sätt.
- ▶ Man fixar 0:or under denna 1:a.
- ▶ Och så vidare, tills det inte finns några rader kvar.

Detta är Gaussdelen av arbetet. Om man fortsätter att arbeta med matrisen så kallas det *Gauss-Jordans* metod.

- ▶ Man fixar 0:or ovanför 1:an i nedersta raden, genom att addera lämpliga multiplar av den raden till de ovanför.
- ▶ Man fixar 0:or ovanför 1:an i näst nedersta raden på samma sätt.

# Gausselimination

Hur man gör

## Hur kommer man dit?

- ▶ Man fixar 1:an först i första raden, antingen genom att multiplicera raden med något eller genom att byta plats på ett par rader.
- ▶ Man fixar 0:or under denna 1:a, genom att addera lämpliga multiplar av första raden till de nedanför.
- ▶ Man fixar 1:an i andra raden på samma sätt.
- ▶ Man fixar 0:or under denna 1:a.
- ▶ Och så vidare, tills det inte finns några rader kvar.

Detta är Gaussdelen av arbetet. Om man fortsätter att arbeta med matrisen så kallas det *Gauss-Jordans* metod.

- ▶ Man fixar 0:or ovanför 1:an i nedersta raden, genom att addera lämpliga multiplar av den raden till de ovanför.
- ▶ Man fixar 0:or ovanför 1:an i näst nedersta raden på samma sätt.
- ▶ Och så vidare, tills man når översta raden.

# Gausselimination

Hur man gör

## Hur kommer man dit?

- ▶ Man fixar 1:an först i första raden, antingen genom att multiplicera raden med något eller genom att byta plats på ett par rader.
- ▶ Man fixar 0:or under denna 1:a, genom att addera lämpliga multiplar av första raden till de nedanför.
- ▶ Man fixar 1:an i andra raden på samma sätt.
- ▶ Man fixar 0:or under denna 1:a.
- ▶ Och så vidare, tills det inte finns några rader kvar.

Detta är Gaussdelen av arbetet. Om man fortsätter att arbeta med matrisen så kallas det *Gauss-Jordans* metod.

- ▶ Man fixar 0:or ovanför 1:an i nedersta raden, genom att addera lämpliga multiplar av den raden till de ovanför.
- ▶ Man fixar 0:or ovanför 1:an i näst nedersta raden på samma sätt.
- ▶ Och så vidare, tills man når översta raden.

KLART!

# Gausselimination

Ett enkelt exempel

$$\begin{cases} 3x - 8y + z = 22 \\ 2x - 3y + 4z = 20 \\ x - 2y + z = 8 \end{cases}$$

Vi ska lösa detta ekvationssystem.

# Gausselimination

Ett enkelt exempel

$$\begin{cases} 3x - 8y + z = 22 \\ 2x - 3y + 4z = 20 \\ x - 2y + z = 8 \end{cases}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & -8 & 1 & 22 \\ 2 & -3 & 4 & 20 \\ 1 & -2 & 1 & 8 \end{array} \right]$$

Vi börjar med att skriva systemet på på matrisform.

# Gausselimination

Ett enkelt exempel

$$\begin{cases} 3x - 8y + z = 22 \\ 2x - 3y + 4z = 20 \\ x - 2y + z = 8 \end{cases}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & -8 & 1 & 22 \\ 2 & -3 & 4 & 20 \\ 1 & -2 & 1 & 8 \end{array} \right]$$

Vi börjar med att skriva systemet på matrisform.

(Strecket som skiljer koefficientdelen från högerledet är inte nödvändigt, men det kan bli lättare att läsa om man tar med det.)

# Gausselimination

Ett enkelt exempel

$$\begin{cases} 3x - 8y + z = 22 \\ 2x - 3y + 4z = 20 \\ x - 2y + z = 8 \end{cases}$$


$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & -8 & 1 & 22 \\ 2 & -3 & 4 & 20 \\ 1 & -2 & 1 & 8 \end{array} \right]$$

Nu vill vi ha en 1:a först i första raden.

# Gausselimination

Ett enkelt exempel

$$\begin{cases} 3x - 8y + z = 22 \\ 2x - 3y + 4z = 20 \\ x - 2y + z = 8 \end{cases}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & -8 & 1 & 22 \\ 2 & -3 & 4 & 20 \\ 1 & -2 & 1 & 8 \end{array} \right]$$


Nu vill vi ha en 1:a först i första raden.

Vi skulle kunna multiplicera första raden med  $\frac{1}{3}$ , men det blir enklare räkningar om vi istället byter plats på första och tredje raden, eftersom den redan har en 1:a först.

# Gausselimination

Ett enkelt exempel

$$\begin{cases} 3x - 8y + z = 22 \\ 2x - 3y + 4z = 20 \\ x - 2y + z = 8 \end{cases}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & -8 & 1 & 22 \\ 2 & -3 & 4 & 20 \\ 1 & -2 & 1 & 8 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 2 & -3 & 4 & 20 \\ 3 & -8 & 1 & 22 \end{array} \right]$$


Nu vill vi ha en 1:a först i första raden.

Vi skulle kunna multiplicera första raden med  $1/3$ , men det blir enklare räkningar om vi istället byter plats på första och tredje raden, eftersom den redan har en 1:a först.

# Gausselimination

Ett enkelt exempel

$$\begin{cases} 3x - 8y + z = 22 \\ 2x - 3y + 4z = 20 \\ x - 2y + z = 8 \end{cases}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & -8 & 1 & 22 \\ 2 & -3 & 4 & 20 \\ 1 & -2 & 1 & 8 \end{array} \right]$$


$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 2 & -3 & 4 & 20 \\ 3 & -8 & 1 & 22 \end{array} \right]$$

Nu vill vi ha 0:or under  
1:an i första raden.

# Gausselimination

Ett enkelt exempel

$$\begin{cases} 3x - 8y + z = 22 \\ 2x - 3y + 4z = 20 \\ x - 2y + z = 8 \end{cases}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & -8 & 1 & 22 \\ 2 & -3 & 4 & 20 \\ 1 & -2 & 1 & 8 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 2 & -3 & 4 & 20 \\ 3 & -8 & 1 & 22 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ & & & \\ & & & \end{array} \right]$$


Nu vill vi ha 0:or under 1:an i första raden.


Vi börjar skriva upp nästa matris. Första raden där är densamma som här. Övriga element kommer vi att fylla i efter hand.

# Gausselimination

Ett enkelt exempel

$$\begin{cases} 3x - 8y + z = 22 \\ 2x - 3y + 4z = 20 \\ x - 2y + z = 8 \end{cases}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & -8 & 1 & 22 \\ 2 & -3 & 4 & 20 \\ 1 & -2 & 1 & 8 \end{array} \right]$$


$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 2 & -3 & 4 & 20 \\ 3 & -8 & 1 & 22 \end{array} \right]$$



$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ & & & \\ & & & \end{array} \right]$$


För att få bort 2:an i andra raden så kan vi dra 2 gånger första raden från den andra.

# Gausselimination

Ett enkelt exempel

$$\begin{cases} 3x - 8y + z = 22 \\ 2x - 3y + 4z = 20 \\ x - 2y + z = 8 \end{cases}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & -8 & 1 & 22 \\ 2 & -3 & 4 & 20 \\ 1 & -2 & 1 & 8 \end{array} \right]$$


$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 2 & -3 & 4 & 20 \\ 3 & -8 & 1 & 22 \end{array} \right]$$


$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ & & & \\ & & & \end{array} \right]$$


För att få bort 2:an i andra raden så kan vi dra 2 gånger första raden från den andra.


*Här ska hända något pedagogiskt som jag inte riktigt lyckats förklara för datorn än...*

# Gausselimination

Ett enkelt exempel

$$\begin{cases} 3x - 8y + z = 22 \\ 2x - 3y + 4z = 20 \\ x - 2y + z = 8 \end{cases}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & -8 & 1 & 22 \\ 2 & -3 & 4 & 20 \\ 1 & -2 & 1 & 8 \end{array} \right]$$


$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 2 & -3 & 4 & 20 \\ 3 & -8 & 1 & 22 \end{array} \right]$$


$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ & & & \end{array} \right]$$

För att få bort 2:an i andra raden så kan vi dra 2 gånger första raden från den andra.

*Här ska hända något pedagogiskt som jag inte riktigt lyckats förklara för datorn än...*

# Gausselimination

Ett enkelt exempel

$$\begin{cases} 3x - 8y + z = 22 \\ 2x - 3y + 4z = 20 \\ x - 2y + z = 8 \end{cases}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & -8 & 1 & 22 \\ 2 & -3 & 4 & 20 \\ 1 & -2 & 1 & 8 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 2 & -3 & 4 & 20 \\ 3 & -8 & 1 & 22 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{array} \right]$$

För att få bort 3:an i tredje raden kan vi dra bort 3 gånger första raden.

# Gausselimination

Ett enkelt exempel

$$\begin{cases} 3x - 8y + z = 22 \\ 2x - 3y + 4z = 20 \\ x - 2y + z = 8 \end{cases}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & -8 & 1 & 22 \\ 2 & -3 & 4 & 20 \\ 1 & -2 & 1 & 8 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 2 & -3 & 4 & 20 \\ 3 & -8 & 1 & 22 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{array} \right]$$

För att få bort 3:an i tredje raden kan vi dra bort 3 gånger första raden.

*Nånting pedagogiskt!*

# Gausselimination

Ett enkelt exempel

$$\begin{cases} 3x - 8y + z = 22 \\ 2x - 3y + 4z = 20 \\ x - 2y + z = 8 \end{cases}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & -8 & 1 & 22 \\ 2 & -3 & 4 & 20 \\ 1 & -2 & 1 & 8 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 2 & -3 & 4 & 20 \\ 3 & -8 & 1 & 22 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \end{array} \right]$$


För att få bort 3:an i tredje raden kan vi dra bort 3 gånger första raden.

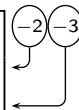
*Nånting pedagogiskt!*

# Gausselimination

Ett enkelt exempel

$$\begin{cases} 3x - 8y + z = 22 \\ 2x - 3y + 4z = 20 \\ x - 2y + z = 8 \end{cases}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & -8 & 1 & 22 \\ 2 & -3 & 4 & 20 \\ 1 & -2 & 1 & 8 \end{array} \right]$$


$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 2 & -3 & 4 & 20 \\ 3 & -8 & 1 & 22 \end{array} \right]$$


$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \end{array} \right]$$

Nu är det dags att ordna en 1:a i andra radens andra position.

# Gausselimination

Ett enkelt exempel

$$\begin{cases} 3x - 8y + z = 22 \\ 2x - 3y + 4z = 20 \\ x - 2y + z = 8 \end{cases}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & -8 & 1 & 22 \\ 2 & -3 & 4 & 20 \\ 1 & -2 & 1 & 8 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 2 & -3 & 4 & 20 \\ 3 & -8 & 1 & 22 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \end{array} \right]$$

Nu är det dags att ordna en 1:a i andra radens andra position. Det är det redan, så vi behöver inte göra något.

# Gausselimination

Ett enkelt exempel

$$\begin{cases} 3x - 8y + z = 22 \\ 2x - 3y + 4z = 20 \\ x - 2y + z = 8 \end{cases}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & -8 & 1 & 22 \\ 2 & -3 & 4 & 20 \\ 1 & -2 & 1 & 8 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 2 & -3 & 4 & 20 \\ 3 & -8 & 1 & 22 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \end{array} \right]$$

Nu ska vi ordna 0:or under denna 1:a.

# Gausselimination

Ett enkelt exempel

$$\begin{cases} 3x - 8y + z = 22 \\ 2x - 3y + 4z = 20 \\ x - 2y + z = 8 \end{cases} \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & -8 & 1 & 22 \\ 2 & -3 & 4 & 20 \\ 1 & -2 & 1 & 8 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 2 & -3 & 4 & 20 \\ 3 & -8 & 1 & 22 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow \textcircled{-2} \textcircled{-3} \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \end{array} \right]$$

Nu ska vi ordna 0:or under denna 1:a.

Vi börjar med att skriva upp matrisen.

De första två raderna ska in som de är, men vi ska fylla i en ny tredje rad.

# Gausselimination

Ett enkelt exempel

$$\begin{cases} 3x - 8y + z = 22 \\ 2x - 3y + 4z = 20 \\ x - 2y + z = 8 \end{cases} \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ \end{array} \right]$$

För att få bort  $-2$  i tredje raden kan vi addera 2 gånger andra raden dit.

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & -8 & 1 & 22 \\ 2 & -3 & 4 & 20 \\ 1 & -2 & 1 & 8 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 2 & -3 & 4 & 20 \\ 3 & -8 & 1 & 22 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \end{array} \right]$$

# Gausselimination

Ett enkelt exempel

$$\begin{cases} 3x - 8y + z = 22 \\ 2x - 3y + 4z = 20 \\ x - 2y + z = 8 \end{cases} \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & -8 & 1 & 22 \\ 2 & -3 & 4 & 20 \\ 1 & -2 & 1 & 8 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 2 & -3 & 4 & 20 \\ 3 & -8 & 1 & 22 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \end{array} \right]$$

För att få bort  $-2$  i tredje raden kan vi addera 2 gånger andra raden dit.

*Nånting pedagogiskt*

# Gausselimination

Ett enkelt exempel

$$\begin{cases} 3x - 8y + z = 22 \\ 2x - 3y + 4z = 20 \\ x - 2y + z = 8 \end{cases} \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & -8 & 1 & 22 \\ 2 & -3 & 4 & 20 \\ 1 & -2 & 1 & 8 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 2 & -3 & 4 & 20 \\ 3 & -8 & 1 & 22 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow \textcircled{-2} \quad \textcircled{-3} \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow \textcircled{2} \end{array}$$

För att få bort  $-2$  i tredje raden kan vi addera 2 gånger andra raden dit.

*Nånting pedagogiskt*

# Gausselimination

Ett enkelt exempel

$$\begin{cases} 3x - 8y + z = 22 \\ 2x - 3y + 4z = 20 \\ x - 2y + z = 8 \end{cases} \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array} \right]$$

Nu vill vi ha en 1:a i 3:e radens 3:e position.

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & -8 & 1 & 22 \\ 2 & -3 & 4 & 20 \\ 1 & -2 & 1 & 8 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 2 & -3 & 4 & 20 \\ 3 & -8 & 1 & 22 \end{array} \right] \begin{array}{l} \textcircled{-2} \textcircled{-3} \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \end{array} \right] \begin{array}{l} \textcircled{2} \\ \leftarrow \end{array}$$

# Gausselimination

Ett enkelt exempel

$$\begin{cases} 3x - 8y + z = 22 \\ 2x - 3y + 4z = 20 \\ x - 2y + z = 8 \end{cases} \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array} \right] \textcircled{1/2}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & -8 & 1 & 22 \\ 2 & -3 & 4 & 20 \\ 1 & -2 & 1 & 8 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 2 & -3 & 4 & 20 \\ 3 & -8 & 1 & 22 \end{array} \right] \begin{array}{l} \textcircled{-2} \textcircled{-3} \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \end{array} \right] \textcircled{2}$$

Nu vill vi ha en 1:a i 3:e radens 3:e position.

Det kan vi få genom att multiplicera raden med  $1/2$ .

# Gausselimination

Ett enkelt exempel

$$\begin{cases} 3x - 8y + z = 22 \\ 2x - 3y + 4z = 20 \\ x - 2y + z = 8 \end{cases} \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array} \right] \textcircled{1/2}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & -8 & 1 & 22 \\ 2 & -3 & 4 & 20 \\ 1 & -2 & 1 & 8 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 2 & -3 & 4 & 20 \\ 3 & -8 & 1 & 22 \end{array} \right] \begin{matrix} \textcircled{-2} \textcircled{-3} \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \end{array} \right] \begin{matrix} \\ \\ \textcircled{2} \leftarrow \end{matrix}$$

Nu har vi genomfört själva "Gauss-delen" av arbetet, och överfört matrisen till **radreducerad trappform**.

# Gausselimination

Ett enkelt exempel

$$\begin{cases} 3x - 8y + z = 22 \\ 2x - 3y + 4z = 20 \\ x - 2y + z = 8 \end{cases} \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array} \right] \textcircled{1/2}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & -8 & 1 & 22 \\ 2 & -3 & 4 & 20 \\ 1 & -2 & 1 & 8 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 2 & -3 & 4 & 20 \\ 3 & -8 & 1 & 22 \end{array} \right] \begin{matrix} \textcircled{-2} \textcircled{-3} \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \end{array} \right] \textcircled{2}$$

Det finns nu två olika sätt att fortsätta:

- ▶ Man skriver tillbaka matrisen till ekvationssystem
- ▶ Man fortsätter att arbeta med matrisen.

# Gausselimination

Ett enkelt exempel

$$\begin{cases} 3x - 8y + z = 22 \\ 2x - 3y + 4z = 20 \\ x - 2y + z = 8 \end{cases} \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array} \right] \textcircled{1/2}$$

Vi fortsätter med matrisen, vilket är Gauss-Jordans metod.

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & -8 & 1 & 22 \\ 2 & -3 & 4 & 20 \\ 1 & -2 & 1 & 8 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 2 & -3 & 4 & 20 \\ 3 & -8 & 1 & 22 \end{array} \right] \begin{matrix} \textcircled{-2} \textcircled{-3} \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \end{array} \right] \textcircled{2} \leftarrow$$

# Gausselimination

Ett enkelt exempel

$$\begin{cases} 3x - 8y + z = 22 \\ 2x - 3y + 4z = 20 \\ x - 2y + z = 8 \end{cases} \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array} \right] \textcircled{1/2}$$

Nu ska vi se till att det blir 0:or **ovanför** 1:an i nedersta raden.

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & -8 & 1 & 22 \\ 2 & -3 & 4 & 20 \\ 1 & -2 & 1 & 8 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 2 & -3 & 4 & 20 \\ 3 & -8 & 1 & 22 \end{array} \right] \begin{matrix} \textcircled{-2} \textcircled{-3} \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \end{array} \right] \textcircled{2}$$

# Gausselimination

Ett enkelt exempel

$$\begin{cases} 3x - 8y + z = 22 \\ 2x - 3y + 4z = 20 \\ x - 2y + z = 8 \end{cases} \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array} \right] \textcircled{1/2}$$

Vi skriver upp en ny matris att fylla i.

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & -8 & 1 & 22 \\ 2 & -3 & 4 & 20 \\ 1 & -2 & 1 & 8 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 2 & -3 & 4 & 20 \\ 3 & -8 & 1 & 22 \end{array} \right] \begin{array}{l} \textcircled{-2} \textcircled{-3} \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} & & & \\ & & & \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \end{array} \right] \textcircled{2} \leftarrow$$

# Gausselimination

Ett enkelt exempel

$$\begin{cases} 3x - 8y + z = 22 \\ 2x - 3y + 4z = 20 \\ x - 2y + z = 8 \end{cases} \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array} \right] \begin{matrix} \\ \\ \circlearrowleft 1/2 \end{matrix}$$

För att bli av med 2:an i andra raden så kan vi dra bort 2 gånger tredje raden.

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & -8 & 1 & 22 \\ 2 & -3 & 4 & 20 \\ 1 & -2 & 1 & 8 \end{array} \right] \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \begin{matrix} \\ \leftarrow \circlearrowleft -2 \\ \leftarrow \end{matrix}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 2 & -3 & 4 & 20 \\ 3 & -8 & 1 & 22 \end{array} \right] \begin{matrix} \leftarrow \circlearrowleft -2 \quad \circlearrowleft -3 \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} & & & \\ & & & \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \end{array} \right] \begin{matrix} \\ \leftarrow \circlearrowleft 2 \\ \leftarrow \end{matrix}$$

# Gausselimination

Ett enkelt exempel

$$\begin{cases} 3x - 8y + z = 22 \\ 2x - 3y + 4z = 20 \\ x - 2y + z = 8 \end{cases} \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array} \right] \begin{matrix} \\ \\ \circlearrowleft \frac{1}{2} \end{matrix}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & -8 & 1 & 22 \\ 2 & -3 & 4 & 20 \\ 1 & -2 & 1 & 8 \end{array} \right] \begin{matrix} \circlearrowleft \\ \circlearrowleft \\ \circlearrowleft \end{matrix} \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \begin{matrix} \\ \circlearrowleft \\ \circlearrowleft -2 \end{matrix}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 2 & -3 & 4 & 20 \\ 3 & -8 & 1 & 22 \end{array} \right] \begin{matrix} \circlearrowleft -2 \quad \circlearrowleft -3 \\ \circlearrowleft \\ \circlearrowleft \end{matrix} \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} & & & \\ & & & \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \end{array} \right] \begin{matrix} \\ \circlearrowleft 2 \\ \circlearrowleft \end{matrix}$$

För att bli av med 2:an i andra raden så kan vi dra bort 2 gånger tredje raden.

*Pedagogisk kommentar.*

# Gausselimination

Ett enkelt exempel

$$\begin{cases} 3x - 8y + z = 22 \\ 2x - 3y + 4z = 20 \\ x - 2y + z = 8 \end{cases} \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array} \right] \begin{matrix} \\ \\ \textcircled{1/2} \end{matrix}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & -8 & 1 & 22 \\ 2 & -3 & 4 & 20 \\ 1 & -2 & 1 & 8 \end{array} \right] \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \begin{matrix} \\ \\ \textcircled{-2} \end{matrix}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 2 & -3 & 4 & 20 \\ 3 & -8 & 1 & 22 \end{array} \right] \begin{matrix} \textcircled{-2} \textcircled{-3} \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} & & & \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \end{array} \right] \begin{matrix} \\ \\ \textcircled{2} \end{matrix}$$

För att bli av med 2:an i andra raden så kan vi dra bort 2 gånger tredje raden.

*Pedagogisk kommentar.*

# Gausselimination

Ett enkelt exempel

$$\begin{cases} 3x - 8y + z = 22 \\ 2x - 3y + 4z = 20 \\ x - 2y + z = 8 \end{cases} \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array} \right] \begin{matrix} \\ \\ \textcircled{1/2} \end{matrix}$$

För att bli av med 1:an i första raden så kan vi dra bort tredje raden.

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & -8 & 1 & 22 \\ 2 & -3 & 4 & 20 \\ 1 & -2 & 1 & 8 \end{array} \right] \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \textcircled{-2} \textcircled{-1} \\ \leftarrow \end{matrix}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 2 & -3 & 4 & 20 \\ 3 & -8 & 1 & 22 \end{array} \right] \begin{matrix} \textcircled{-2} \textcircled{-3} \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} & & & \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \end{array} \right] \begin{matrix} \\ \textcircled{2} \\ \leftarrow \end{matrix}$$

# Gausselimination

Ett enkelt exempel

$$\begin{cases} 3x - 8y + z = 22 \\ 2x - 3y + 4z = 20 \\ x - 2y + z = 8 \end{cases} \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array} \right] \begin{matrix} \\ \\ \textcircled{1/2} \end{matrix}$$

För att bli av med 1:an i första raden så kan vi dra bort tredje raden.  
*Pedagogisk kommentar.*

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & -8 & 1 & 22 \\ 2 & -3 & 4 & 20 \\ 1 & -2 & 1 & 8 \end{array} \right] \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \textcircled{-2} \textcircled{-1} \\ \leftarrow \end{matrix}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 2 & -3 & 4 & 20 \\ 3 & -8 & 1 & 22 \end{array} \right] \begin{matrix} \textcircled{-2} \textcircled{-3} \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow \end{matrix}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \end{array} \right] \begin{matrix} \\ \textcircled{2} \\ \leftarrow \end{matrix}$$

# Gausselimination

Ett enkelt exempel

$$\begin{cases} 3x - 8y + z = 22 \\ 2x - 3y + 4z = 20 \\ x - 2y + z = 8 \end{cases} \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array} \right] \begin{matrix} \\ \\ \textcircled{1/2} \end{matrix}$$

Nu ska vi ordna 0:or ovanför 1:an i andra raden.

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & -8 & 1 & 22 \\ 2 & -3 & 4 & 20 \\ 1 & -2 & 1 & 8 \end{array} \right] \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \textcircled{-2} \textcircled{-1} \\ \leftarrow \end{matrix}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 2 & -3 & 4 & 20 \\ 3 & -8 & 1 & 22 \end{array} \right] \begin{matrix} \textcircled{-2} \textcircled{-3} \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \end{array} \right] \begin{matrix} \\ \textcircled{2} \\ \leftarrow \end{matrix}$$

# Gausselimination

Ett enkelt exempel

$$\begin{cases} 3x - 8y + z = 22 \\ 2x - 3y + 4z = 20 \\ x - 2y + z = 8 \end{cases} \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array} \right] \begin{matrix} \\ \\ \textcircled{1/2} \end{matrix}$$

Nu ska vi ordna 0:or ovanför 1:an i andra raden.

Vi ritar upp matrisen.

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & -8 & 1 & 22 \\ 2 & -3 & 4 & 20 \\ 1 & -2 & 1 & 8 \end{array} \right] \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \textcircled{-2} \textcircled{-1} \\ \leftarrow \end{matrix}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 2 & -3 & 4 & 20 \\ 3 & -8 & 1 & 22 \end{array} \right] \begin{matrix} \textcircled{-2} \textcircled{-3} \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \end{array} \right] \begin{matrix} \textcircled{2} \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} & & & \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

# Gausselimination

Ett enkelt exempel

$$\begin{cases} 3x - 8y + z = 22 \\ 2x - 3y + 4z = 20 \\ x - 2y + z = 8 \end{cases} \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array} \right] \begin{matrix} \\ \\ \textcircled{1/2} \end{matrix}$$

För att få bort  $-2$  i första raden kan vi dra bort 2 gånger andra raden.

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & -8 & 1 & 22 \\ 2 & -3 & 4 & 20 \\ 1 & -2 & 1 & 8 \end{array} \right] \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \textcircled{-2} \textcircled{-1} \\ \leftarrow \end{matrix}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 2 & -3 & 4 & 20 \\ 3 & -8 & 1 & 22 \end{array} \right] \begin{matrix} \textcircled{-2} \textcircled{-3} \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \begin{matrix} \leftarrow \\ \textcircled{2} \\ \leftarrow \end{matrix}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \end{array} \right] \begin{matrix} \\ \textcircled{2} \\ \leftarrow \end{matrix} \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} & & & \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

# Gausselimination

Ett enkelt exempel

$$\begin{cases} 3x - 8y + z = 22 \\ 2x - 3y + 4z = 20 \\ x - 2y + z = 8 \end{cases} \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array} \right] \begin{matrix} \\ \\ \textcircled{1/2} \end{matrix}$$

För att få bort  $-2$  i första raden kan vi dra bort 2 gånger andra raden.

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & -8 & 1 & 22 \\ 2 & -3 & 4 & 20 \\ 1 & -2 & 1 & 8 \end{array} \right] \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \textcircled{-2} \textcircled{-1} \\ \leftarrow \end{matrix}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 2 & -3 & 4 & 20 \\ 3 & -8 & 1 & 22 \end{array} \right] \begin{matrix} \textcircled{-2} \textcircled{-3} \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \begin{matrix} \leftarrow \\ \textcircled{2} \\ \leftarrow \end{matrix}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \end{array} \right] \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \textcircled{2} \\ \leftarrow \end{matrix} \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

# Gausselimination

Ett enkelt exempel

$$\begin{cases} 3x - 8y + z = 22 \\ 2x - 3y + 4z = 20 \\ x - 2y + z = 8 \end{cases} \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array} \right] \begin{matrix} \\ \\ \textcircled{1/2} \end{matrix}$$

Vi är klara!

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & -8 & 1 & 22 \\ 2 & -3 & 4 & 20 \\ 1 & -2 & 1 & 8 \end{array} \right] \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \textcircled{-2} \textcircled{-1} \\ \leftarrow \end{matrix}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 2 & -3 & 4 & 20 \\ 3 & -8 & 1 & 22 \end{array} \right] \begin{matrix} \textcircled{-2} \textcircled{-3} \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \begin{matrix} \leftarrow \\ \textcircled{2} \\ \leftarrow \end{matrix}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \end{array} \right] \begin{matrix} \leftarrow \\ \textcircled{2} \\ \leftarrow \end{matrix} \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

# Gausselimination

Ett enkelt exempel

$$\begin{cases} 3x - 8y + z = 22 \\ 2x - 3y + 4z = 20 \\ x - 2y + z = 8 \end{cases} \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array} \right] \begin{matrix} \\ \\ \textcircled{1/2} \end{matrix}$$

Vi är klara!

Det vi har här motsvarar ekvationssystemet

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & -8 & 1 & 22 \\ 2 & -3 & 4 & 20 \\ 1 & -2 & 1 & 8 \end{array} \right] \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \textcircled{-2} \textcircled{-1} \\ \leftarrow \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 2 & -3 & 4 & 20 \\ 3 & -8 & 1 & 22 \end{array} \right] \begin{matrix} \textcircled{-2} \textcircled{-3} \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \begin{matrix} \leftarrow \\ \textcircled{2} \\ \leftarrow \end{matrix}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \end{array} \right] \begin{matrix} \\ \textcircled{2} \\ \leftarrow \end{matrix} \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

# Gausselimination

Ett enkelt exempel

$$\begin{cases} 3x - 8y + z = 22 \\ 2x - 3y + 4z = 20 \\ x - 2y + z = 8 \end{cases} \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array} \right] \begin{matrix} \\ \\ \textcircled{1/2} \end{matrix}$$

Vi är klara!

Det vi har här motsvarar ekvationssystemet

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & -8 & 1 & 22 \\ 2 & -3 & 4 & 20 \\ 1 & -2 & 1 & 8 \end{array} \right] \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \begin{matrix} \\ \\ \textcircled{-2} \textcircled{-1} \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 2 & -3 & 4 & 20 \\ 3 & -8 & 1 & 22 \end{array} \right] \begin{matrix} \textcircled{-2} \textcircled{-3} \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \begin{matrix} \leftarrow \\ \textcircled{2} \\ \leftarrow \end{matrix}$$

De här små "sidokommentarerna" som vi gjort i uträkningen är ingen officiell del av det hela, men ett lätt-skrivet protokoll över vad som gjorts.

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \end{array} \right] \begin{matrix} \\ \\ \textcircled{2} \end{matrix} \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

# Gausselimination

Ett exempel med komplikationer

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 6 \\ -2x - 6y - z = 3 \\ 3x + 9y + 4z = 8 \end{cases}$$

Vi vill lösa detta ekvationssystem.

# Gausselimination

Ett exempel med komplikationer

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 6 \\ -2x - 6y - z = 3 \\ 3x + 9y + 4z = 8 \end{cases}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ -2 & -6 & -1 & 3 \\ 3 & 9 & 4 & 8 \end{array} \right]$$

Vi skriver upp matrisen.

# Gausselimination

Ett exempel med komplikationer

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 6 \\ -2x - 6y - z = 3 \\ 3x + 9y + 4z = 8 \end{cases}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ -2 & -6 & -1 & 3 \\ 3 & 9 & 4 & 8 \end{array} \right]$$

Vi vill ha en 1:a i övre vänstra hörnet. Det är klart.

# Gausselimination

Ett exempel med komplikationer

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 6 \\ -2x - 6y - z = 3 \\ 3x + 9y + 4z = 8 \end{cases}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ -2 & -6 & -1 & 3 \\ 3 & 9 & 4 & 8 \end{array} \right]$$

Nu vill vi ha 0:or under  
1:an.

# Gausselimination

Ett exempel med komplikationer

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 6 \\ -2x - 6y - z = 3 \\ 3x + 9y + 4z = 8 \end{cases}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ -2 & -6 & -1 & 3 \\ 3 & 9 & 4 & 8 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ & & & \\ & & & \end{array} \right]$$

Vi börjar med den nya matrisen.

# Gausselimination

Ett exempel med komplikationer

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 6 \\ -2x - 6y - z = 3 \\ 3x + 9y + 4z = 8 \end{cases}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ -2 & -6 & -1 & 3 \\ 3 & 9 & 4 & 8 \end{array} \right]$$

A blue circle highlights the number 2 in the first row, fourth column, with an arrow pointing to the -2 in the second row, fourth column.

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ & & & \\ & & & \end{array} \right]$$

För att få bort  $-2$  i andra raden adderar vi 2 gånger första.

# Gausselimination

Ett exempel med komplikationer

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 6 \\ -2x - 6y - z = 3 \\ 3x + 9y + 4z = 8 \end{cases}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ -2 & -6 & -1 & 3 \\ 3 & 9 & 4 & 8 \end{array} \right] \begin{matrix} \\ \textcircled{2} \\ \end{matrix}$$

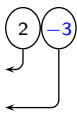
$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 15 \end{array} \right]$$

För att få bort  $-2$  i andra raden adderar vi 2 gånger första.

# Gausselimination

Ett exempel med komplikationer

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 6 \\ -2x - 6y - z = 3 \\ 3x + 9y + 4z = 8 \end{cases}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ -2 & -6 & -1 & 3 \\ 3 & 9 & 4 & 8 \end{array} \right]$$


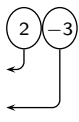
$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 15 \end{array} \right]$$

För att få bort 3 i tredje raden adderar vi  $-3$  gånger första.

# Gausselimination

Ett exempel med komplikationer

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 6 \\ -2x - 6y - z = 3 \\ 3x + 9y + 4z = 8 \end{cases}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ -2 & -6 & -1 & 3 \\ 3 & 9 & 4 & 8 \end{array} \right]$$


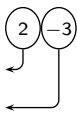
$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & -2 & -10 \end{array} \right]$$

För att få bort 3 i tredje raden adderar vi  $-3$  gånger första.

# Gausselimination

Ett exempel med komplikationer

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 6 \\ -2x - 6y - z = 3 \\ 3x + 9y + 4z = 8 \end{cases}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ -2 & -6 & -1 & 3 \\ 3 & 9 & 4 & 8 \end{array} \right]$$


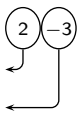
$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & -2 & -10 \end{array} \right]$$

Nu skulle vi vilja ha en 1:a som andra element i andra raden.

# Gausselimination

Ett exempel med komplikationer

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 6 \\ -2x - 6y - z = 3 \\ 3x + 9y + 4z = 8 \end{cases}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ -2 & -6 & -1 & 3 \\ 3 & 9 & 4 & 8 \end{array} \right]$$


$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & -2 & -10 \end{array} \right]$$

Tyvärr är detta omöjligt att åstadkomma!

# Gausselimination

Ett exempel med komplikationer

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 6 \\ -2x - 6y - z = 3 \\ 3x + 9y + 4z = 8 \end{cases}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ -2 & -6 & -1 & 3 \\ 3 & 9 & 4 & 8 \end{array} \right] \begin{array}{l} \textcircled{2} \textcircled{-3} \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}$$

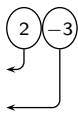
$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & -2 & -10 \end{array} \right]$$

Alla rader utom den översta har 0:or där, och det finns inget som man kan multiplicera med som omvandlar en 0:a till en 1:a.

# Gausselimination

Ett exempel med komplikationer

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 6 \\ -2x - 6y - z = 3 \\ 3x + 9y + 4z = 8 \end{cases}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ -2 & -6 & -1 & 3 \\ 3 & 9 & 4 & 8 \end{array} \right]$$


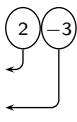
$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & -2 & -10 \end{array} \right]$$

Och om vi använder översta raden så kommer vi att förstöra de 0:or som vi nyss gjort.

# Gausselimination

Ett exempel med komplikationer

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 6 \\ -2x - 6y - z = 3 \\ 3x + 9y + 4z = 8 \end{cases}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ -2 & -6 & -1 & 3 \\ 3 & 9 & 4 & 8 \end{array} \right]$$


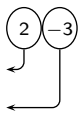
$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & -2 & -10 \end{array} \right]$$

Vi får ge upp.

# Gausselimination

Ett exempel med komplikationer

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 6 \\ -2x - 6y - z = 3 \\ 3x + 9y + 4z = 8 \end{cases}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ -2 & -6 & -1 & 3 \\ 3 & 9 & 4 & 8 \end{array} \right]$$


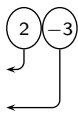
$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & -2 & -10 \end{array} \right]$$


Istället försöker vi få nästa element till 1.

# Gausselimination

Ett exempel med komplikationer

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 6 \\ -2x - 6y - z = 3 \\ 3x + 9y + 4z = 8 \end{cases}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ -2 & -6 & -1 & 3 \\ 3 & 9 & 4 & 8 \end{array} \right]$$


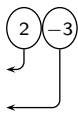
$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & -2 & -10 \end{array} \right]$$


Det kan vi åstadkomma genom att multiplicera med  $1/3$ .

# Gausselimination

Ett exempel med komplikationer

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 6 \\ -2x - 6y - z = 3 \\ 3x + 9y + 4z = 8 \end{cases}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ -2 & -6 & -1 & 3 \\ 3 & 9 & 4 & 8 \end{array} \right]$$


$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & -2 & -10 \end{array} \right]$$

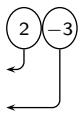

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -10 \end{array} \right]$$

Det kan vi åstadkomma genom att multiplicera med  $1/3$ .

# Gausselimination

Ett exempel med komplikationer

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 6 \\ -2x - 6y - z = 3 \\ 3x + 9y + 4z = 8 \end{cases}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ -2 & -6 & -1 & 3 \\ 3 & 9 & 4 & 8 \end{array} \right]$$


$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & -2 & -10 \end{array} \right]$$


$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -10 \end{array} \right]$$

Nu ska vi ha 0:or under 1:an som vi gjorde.

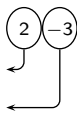
# Gausselimination

Ett exempel med komplikationer

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 6 \\ -2x - 6y - z = 3 \\ 3x + 9y + 4z = 8 \end{cases}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right]$$

Vi behöver en ny matris.

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ -2 & -6 & -1 & 3 \\ 3 & 9 & 4 & 8 \end{array} \right]$$


$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & -2 & -10 \end{array} \right]$$


$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -10 \end{array} \right]$$

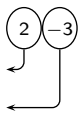
# Gausselimination

Ett exempel med komplikationer


$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 6 \\ -2x - 6y - z = 3 \\ 3x + 9y + 4z = 8 \end{cases}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right]$$

För att få bort  $-2$  i tredje raden adderar vi 2 gånger andra raden.

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ -2 & -6 & -1 & 3 \\ 3 & 9 & 4 & 8 \end{array} \right]$$


$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & -2 & -10 \end{array} \right]$$


$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -10 \end{array} \right]$$


# Gausselimination

Ett exempel med komplikationer

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 6 \\ -2x - 6y - z = 3 \\ 3x + 9y + 4z = 8 \end{cases}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

För att få bort  $-2$  i tredje raden adderar vi 2 gånger andra raden.

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ -2 & -6 & -1 & 3 \\ 3 & 9 & 4 & 8 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & -2 & -10 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -10 \end{array} \right]$$

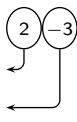
# Gausselimination

Ett exempel med komplikationer


$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 6 \\ -2x - 6y - z = 3 \\ 3x + 9y + 4z = 8 \end{cases}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Vad betyder den tredjerad vi nu har?

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ -2 & -6 & -1 & 3 \\ 3 & 9 & 4 & 8 \end{array} \right]$$


$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & -2 & -10 \end{array} \right]$$

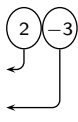

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -10 \end{array} \right]$$


# Gausselimination


Ett exempel med komplikationer

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 6 \\ -2x - 6y - z = 3 \\ 3x + 9y + 4z = 8 \end{cases}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ -2 & -6 & -1 & 3 \\ 3 & 9 & 4 & 8 \end{array} \right]$$


$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & -2 & -10 \end{array} \right]$$


$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -10 \end{array} \right]$$


Den säger att  $0x + 0y + 0z = 0$ . Det är ju sant för alla värden på  $x$ ,  $y$  och  $z$ , så det säger ingenting om vad svaret ska vara.

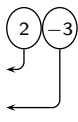
# Gausselimination

Ett exempel med komplikationer


$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 6 \\ -2x - 6y - z = 3 \\ 3x + 9y + 4z = 8 \end{cases}$$


$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Vi kan lika gärna ta bort den raden.

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ -2 & -6 & -1 & 3 \\ 3 & 9 & 4 & 8 \end{array} \right]$$


$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & -2 & -10 \end{array} \right]$$


$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -10 \end{array} \right]$$


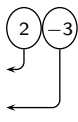
# Gausselimination

Ett exempel med komplikationer

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 6 \\ -2x - 6y - z = 3 \\ 3x + 9y + 4z = 8 \end{cases}$$


$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Nu ska vi ordna 0:or ovanför 1:an i sista raden.

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ -2 & -6 & -1 & 3 \\ 3 & 9 & 4 & 8 \end{array} \right]$$


$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & -2 & -10 \end{array} \right]$$


$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -10 \end{array} \right]$$


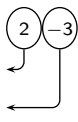
# Gausselimination

Ett exempel med komplikationer

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 6 \\ -2x - 6y - z = 3 \\ 3x + 9y + 4z = 8 \end{cases}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$


Ny matris:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ -2 & -6 & -1 & 3 \\ 3 & 9 & 4 & 8 \end{array} \right]$$


$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & -2 & -10 \end{array} \right]$$


$$\left[ \begin{array}{ccc|c} & & & \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -10 \end{array} \right]$$


# Gausselimination

Ett exempel med komplikationer

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 6 \\ -2x - 6y - z = 3 \\ 3x + 9y + 4z = 8 \end{cases}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Vi adderar  $-2$  gånger nedersta raden.

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ -2 & -6 & -1 & 3 \\ 3 & 9 & 4 & 8 \end{array} \right]$$

Annotations: A circled '2' is above the first row, and a circled '-3' is above the second row. Arrows point from these circles to the first and second rows of the matrix, respectively.

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right]$$

Annotations: The '2' in the first row is blue. A circled '-2' is to the right of the second row, with an arrow pointing to the second row.

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & -2 & -10 \end{array} \right]$$

Annotation: A circled '1/3' is to the right of the second row, with an arrow pointing to the second row.

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -10 \end{array} \right]$$

Annotation: A circled '2' is to the right of the second row, with an arrow pointing to the second row.

# Gausselimination

Ett exempel med komplikationer

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 6 \\ -2x - 6y - z = 3 \\ 3x + 9y + 4z = 8 \end{cases}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Vi adderar  $-2$  gånger nedersta raden.

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ -2 & -6 & -1 & 3 \\ 3 & 9 & 4 & 8 \end{array} \right]$$

Annotations: A circled '2' is above the first row's constant term (6), and a circled '-3' is above the second row's constant term (3). Arrows point from these circles to the constant term of the second row (3).

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Annotation: A circled '-2' is to the right of the second row's constant term (5). An arrow points from this circle to the constant term of the second row (5).

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & -2 & -10 \end{array} \right]$$

Annotation: A circled '1/3' is to the right of the second row's constant term (15). An arrow points from this circle to the constant term of the second row (15).

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -10 \end{array} \right]$$

Annotation: A circled '2' is to the right of the second row's constant term (5). An arrow points from this circle to the constant term of the third row (-10).

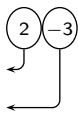
# Gausselimination


Ett exempel med komplikationer


$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 6 \\ -2x - 6y - z = 3 \\ 3x + 9y + 4z = 8 \end{cases}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Nu är vi klara; bättre än så här blir det inte.

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ -2 & -6 & -1 & 3 \\ 3 & 9 & 4 & 8 \end{array} \right]$$


$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right]$$


$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & -2 & -10 \end{array} \right]$$


$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -10 \end{array} \right]$$


# Gausselimination

Ett exempel med komplikationer

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 6 \\ -2x - 6y - z = 3 \\ 3x + 9y + 4z = 8 \end{cases}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Matrisen motsvarar det här ekvationssystemet.

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ -2 & -6 & -1 & 3 \\ 3 & 9 & 4 & 8 \end{array} \right]$$

Annotations: A circled '2' is above the first row's constant term (6), and a circled '-3' is above the second row's constant term (3). Arrows point from these circles to the second row's constant term (3) and the third row's constant term (8) respectively.

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right]$$

Annotation: A circled '-2' is to the right of the second row's constant term (5), with an arrow pointing to the second row's constant term (5).

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & -2 & -10 \end{array} \right]$$

Annotation: A circled '1/3' is to the right of the second row's constant term (15), with an arrow pointing to the second row's constant term (15).

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right]$$

$$\begin{cases} x + 3y = -4 \\ z = 5 \end{cases}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -10 \end{array} \right]$$

Annotation: A circled '2' is to the right of the second row's constant term (5), with an arrow pointing to the second row's constant term (5).

# Gausselimination

Ett exempel med komplikationer

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 6 \\ -2x - 6y - z = 3 \\ 3x + 9y + 4z = 8 \end{cases}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ -2 & -6 & -1 & 3 \\ 3 & 9 & 4 & 8 \end{array} \right] \begin{array}{l} \textcircled{2} \textcircled{-3} \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & -2 & -10 \end{array} \right] \begin{array}{l} \textcircled{1/3} \end{array}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -10 \end{array} \right] \begin{array}{l} \textcircled{2} \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right] \begin{array}{l} \textcircled{-2} \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right]$$

$$\begin{cases} x + 3y = -4 \\ z = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -4 - 3y \\ z = 5 \end{cases}$$

Det kan skrivas om så här. Det fanns inte tillräckligt med information i ekvationssystemet för att vi skulle kunna bestämma alla de obekanta.

# Gausselimination

Ett exempel med komplikationer

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 6 \\ -2x - 6y - z = 3 \\ 3x + 9y + 4z = 8 \end{cases}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ -2 & -6 & -1 & 3 \\ 3 & 9 & 4 & 8 \end{array} \right] \begin{array}{l} \textcircled{2} \textcircled{-3} \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & -2 & -10 \end{array} \right] \begin{array}{l} \textcircled{1/3} \\ \\ \end{array}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -10 \end{array} \right] \begin{array}{l} \textcircled{2} \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow \\ \textcircled{-2} \end{array}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right]$$

$$\begin{cases} x + 3y = -4 \\ z = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -4 - 3y \\ z = 5 \end{cases}$$

Vanligen skriver man svaret så här:

$$\begin{cases} x = -4 - 3t \\ y = t \\ z = 5 \end{cases}$$

(Det finns situationer där den här formen är mycket användbarare än den förra, fast de betyder samma sak.)

# Gausselimination

Bildspelet är slut. Om du har några synpunkter på det så var snäll och maila dem till

`Hillevi.Gavel@mdh.se`

så ska jag se om jag kan bearbeta det så att det blir bättre.