

Kvadratkomplettering

Steg-för-steg-demonstration

Hillevi Gavel

Institutionen för matematik och fysik (IMa)
Mälardalens högskola (MDH)

3 april 2006

Instruktioner

Det här bildspelet visar hur man genomför en kvadratkomplettering steg för steg. För att se nästa bild i spelet så klickar du på "nästa sida" i din läsare, precis som man gör då man läser en vanlig text. Vill du titta på föregående bild igen så backar du på vanligt sätt.

Spelet inleds med en sammanfattning av bakgrunden till beräkningen.

Sedan kommer ett detaljerat exempel, följt av ett mer skissartat.

Slutligen omnämns några av fördelarna med den kompletterade formen.

Bakgrund

De flesta uttryck kan skrivas på flera olika sätt. Vilket sätt som är "bäst" beror på vad man för ögonblicket håller på med (eller på hur mycket plats man har att skriva det på!).

Bakgrund

De flesta uttryck kan skrivas på flera olika sätt. Vilket sätt som är "bäst" beror på vad man för ögonblicket håller på med (eller på hur mycket plats man har att skriva det på!).

Kvadratkomplettering är en teknik för att skriva om andragsuttryck till en form som i vissa sammanhang är mer användbar än den utvecklade formen $ax^2 + bx + c$.

Bakgrund

De flesta uttryck kan skrivas på flera olika sätt. Vilket sätt som är "bäst" beror på vad man för ögonblicket håller på med (eller på hur mycket plats man har att skriva det på!).

Kvadratkomplettering är en teknik för att skriva om andragsuttryck till en form som i vissa sammanhang är mer användbar än den utvecklade formen $ax^2 + bx + c$.

Den form som man vill ha ska innehålla en **jämn kvadrat**; man är ute efter något i stil med $d(x + e)^2 + f$. Vi ska återkomma med några av poängerna med denna form efter det att vi gått igenom hur man tar fram den.

Hur man gör

Vi önskar kvadratkomplettera uttrycket $2x^2 + 12x + 10$.

Hur man gör

Vi önskar kvadratkomplettera uttrycket $2x^2 + 12x + 10$.

För att vi ska kunna skriva om detta så att det innehåller en jämn kvadrat bör vi först tänka efter hur en jämn kvadrat ser ut:

$$(x + p)^2 = x^2 + 2px + p^2$$

Hur man gör

Vi önskar kvadratkomplettera uttrycket $2x^2 + 12x + 10$.

För att vi ska kunna skriva om detta så att det innehåller en jämn kvadrat bör vi först tänka efter hur en jämn kvadrat ser ut:

$$(x + p)^2 = x^2 + 2px + p^2$$

Vi tittar på det uttryck vi har.

$$2x^2 + 12x + 10$$

Hur man gör

Vi önskar kvadratkomplettera uttrycket $2x^2 + 12x + 10$.

För att vi ska kunna skriva om detta så att det innehåller en jämn kvadrat bör vi först tänka efter hur en jämn kvadrat ser ut:

$$(x + p)^2 = x^2 + 2px + p^2$$

Vi tittar på det uttryck vi har.

Vad är det för "fel" på det?

$$2x^2 + 12x + 10$$

Hur man gör

Vi önskar kvadratkomplettera uttrycket $2x^2 + 12x + 10$.

För att vi ska kunna skriva om detta så att det innehåller en jämn kvadrat bör vi först tänka efter hur en jämn kvadrat ser ut:

$$(x + p)^2 = x^2 + 2px + p^2$$

Ja, först och främst har vi den där 2:an på andragradstermen. Den passar inte in i mallen ovan.

$$2x^2 + 12x + 10$$

Hur man gör

Vi önskar kvadratkomplettera uttrycket $2x^2 + 12x + 10$.

För att vi ska kunna skriva om detta så att det innehåller en jämn kvadrat bör vi först tänka efter hur en jämn kvadrat ser ut:

$$(x + p)^2 = x^2 + 2px + p^2$$

Ja, först och främst har vi den där 2:an på andragradstermen. Den passar inte in i mallen ovan. Hur kan vi bli av med 2:an?

$$2x^2 + 12x + 10$$

Hur man gör

Vi önskar kvadratkomplettera uttrycket $2x^2 + 12x + 10$.

För att vi ska kunna skriva om detta så att det innehåller en jämn kvadrat bör vi först tänka efter hur en jämn kvadrat ser ut:

$$(x + p)^2 = x^2 + 2px + p^2$$

Ja, först och främst har vi den där 2:an på andragradstermen. Den passar inte in i mallen ovan. Hur kan vi bli av med 2:an?

Vi kan bryta ut den, och sedan koncentrera oss på det vi har innanför parenteser.

$$2x^2 + 12x + 10 = 2(x^2 + 6x + 5)$$

Hur man gör

Vi önskar kvadratkomplettera uttrycket $2x^2 + 12x + 10$.

För att vi ska kunna skriva om detta så att det innehåller en jämn kvadrat bör vi först tänka efter hur en jämn kvadrat ser ut:

$$(x + p)^2 = x^2 + 2px + p^2$$

Nu tittar vi på mallen igen.

$$2x^2 + 12x + 10 = 2(x^2 + 6x + 5)$$

Hur man gör

Vi önskar kvadratkomplettera uttrycket $2x^2 + 12x + 10$.

För att vi ska kunna skriva om detta så att det innehåller en jämn kvadrat bör vi först tänka efter hur en jämn kvadrat ser ut:

$$(x + p)^2 = x^2 + 2px + p^2$$

Nu tittar vi på mallen igen.

Efter x^2 ska det vara $+ 2px$, 2 gånger något gånger x .

$$2x^2 + 12x + 10 = 2(x^2 + 6x + 5)$$

Hur man gör

Vi önskar kvadratkomplettera uttrycket $2x^2 + 12x + 10$.

För att vi ska kunna skriva om detta så att det innehåller en jämn kvadrat bör vi först tänka efter hur en jämn kvadrat ser ut:

$$(x + p)^2 = x^2 + 2px + p^2$$

Nu tittar vi på mallen igen.

Efter x^2 ska det vara $+ 2px$, 2 gånger något gånger x .

Så ser inte det vi har ut, vi har $+ 6x$. Vad ska vi få en 2:a ifrån?

$$2x^2 + 12x + 10 = 2(x^2 + 6x + 5)$$

Hur man gör

Vi önskar kvadratkomplettera uttrycket $2x^2 + 12x + 10$.

För att vi ska kunna skriva om detta så att det innehåller en jämn kvadrat bör vi först tänka efter hur en jämn kvadrat ser ut:

$$(x + p)^2 = x^2 + 2px + p^2$$

Nu tittar vi på mallen igen.

Efter x^2 ska det vara $+ 2px$, 2 gånger något gånger x .

Så ser inte det vi har ut, vi har $+ 6x$. Vad ska vi få en 2:a ifrån?

Vi kan bryta ut en 2:a ur 6:an.

$$2x^2 + 12x + 10 = 2(x^2 + 6x + 5) = 2(x^2 + 2 \cdot 3x + 5)$$

Hur man gör

Vi önskar kvadratkomplettera uttrycket $2x^2 + 12x + 10$.

För att vi ska kunna skriva om detta så att det innehåller en jämn kvadrat bör vi först tänka efter hur en jämn kvadrat ser ut:

$$(x + p)^2 = x^2 + 2px + p^2$$

Vad ska man enligt mallen ha sedan?

$$2x^2 + 12x + 10 = 2(x^2 + 6x + 5) = 2(x^2 + 2 \cdot 3x + 5)$$

Hur man gör

Vi önskar kvadratkomplettera uttrycket $2x^2 + 12x + 10$.

För att vi ska kunna skriva om detta så att det innehåller en jämn kvadrat bör vi först tänka efter hur en jämn kvadrat ser ut:

$$(x + p)^2 = x^2 + 2px + p^2$$

+ p^2 , där p är det där talet som vi har 2 av i termen innan.

$$2x^2 + 12x + 10 = 2(x^2 + 6x + 5) = 2(x^2 + 2 \cdot 3x + 5)$$

Hur man gör

Vi önskar kvadratkomplettera uttrycket $2x^2 + 12x + 10$.

För att vi ska kunna skriva om detta så att det innehåller en jämn kvadrat bör vi först tänka efter hur en jämn kvadrat ser ut:

$$(x + p)^2 = x^2 + 2px + p^2$$

+ p^2 , där p är det där talet som vi har 2 av i termen innan.

Det skulle i vårt fall motsvaras av $3^2 = 9$. Det har vi inte.

$$2x^2 + 12x + 10 = 2(x^2 + 6x + 5) = 2(x^2 + 2 \cdot 3x + 5)$$

Hur man gör

Vi önskar kvadratkomplettera uttrycket $2x^2 + 12x + 10$.

För att vi ska kunna skriva om detta så att det innehåller en jämn kvadrat bör vi först tänka efter hur en jämn kvadrat ser ut:

$$(x + p)^2 = x^2 + 2px + p^2$$

+ p^2 , där p är det där talet som vi har 2 av i termen innan.

Det skulle i vårt fall motsvaras av $3^2 = 9$. Det har vi inte. Men inget hindrar oss från att **skriva dit** det, om vi kompenserar för åtgärden genom att dessutom ta bort det!

$$\begin{aligned} 2x^2 + 12x + 10 &= 2(x^2 + 6x + 5) = 2(x^2 + 2 \cdot 3x + 5) = \\ &= 2(x^2 + 2 \cdot 3x + 9 - 9 + 5) \end{aligned}$$

Hur man gör

Vi önskar kvadratkomplettera uttrycket $2x^2 + 12x + 10$.

För att vi ska kunna skriva om detta så att det innehåller en jämn kvadrat bör vi först tänka efter hur en jämn kvadrat ser ut:

$$(x + p)^2 = x^2 + 2px + p^2$$

+ p^2 , där p är det där talet som vi har 2 av i termen innan.

Det skulle i vårt fall motsvaras av $3^2 = 9$. Det har vi inte. Men inget hindrar oss från att skriva dit det, om vi kompenserar för åtgärden genom att dessutom ta bort det! (Det är från det här steget, där vi **kompletterar** det vi har med det vi behöver, som metoden har fått sitt namn.)

$$\begin{aligned} 2x^2 + 12x + 10 &= 2(x^2 + 6x + 5) = 2(x^2 + 2 \cdot 3x + 5) = \\ &= 2(x^2 + 2 \cdot 3x + 9 - 9 + 5) \end{aligned}$$

Hur man gör

Vi önskar kvadratkomplettera uttrycket $2x^2 + 12x + 10$.

För att vi ska kunna skriva om detta så att det innehåller en jämn kvadrat bör vi först tänka efter hur en jämn kvadrat ser ut:

$$(x + p)^2 = x^2 + 2px + p^2$$

De tre första termerna innanför parentesen bildar nu en jämn kvadrat.

$$\begin{aligned} 2x^2 + 12x + 10 &= 2(x^2 + 6x + 5) = 2(x^2 + 2 \cdot 3x + 5) = \\ &= 2(x^2 + 2 \cdot 3x + 9 - 9 + 5) \end{aligned}$$

Hur man gör

Vi önskar kvadratkomplettera uttrycket $2x^2 + 12x + 10$.

För att vi ska kunna skriva om detta så att det innehåller en jämn kvadrat bör vi först tänka efter hur en jämn kvadrat ser ut:

$$(x + p)^2 = x^2 + 2px + p^2$$

De tre första termerna innanför parentesen bildar nu en jämn kvadrat.

$$\begin{aligned} 2x^2 + 12x + 10 &= 2(x^2 + 6x + 5) = 2(x^2 + 2 \cdot 3x + 5) = \\ &= 2(x^2 + 2 \cdot 3x + 9 - 9 + 5) = 2((x + 3)^2 - 9 + 5) \end{aligned}$$

Hur man gör

Vi önskar kvadratkomplettera uttrycket $2x^2 + 12x + 10$.

För att vi ska kunna skriva om detta så att det innehåller en jämn kvadrat bör vi först tänka efter hur en jämn kvadrat ser ut:

$$(x + p)^2 = x^2 + 2px + p^2$$

Vi kan snygga upp lite

$$\begin{aligned} 2x^2 + 12x + 10 &= 2(x^2 + 6x + 5) = 2(x^2 + 2 \cdot 3x + 5) = \\ &= 2(x^2 + 2 \cdot 3x + 9 - 9 + 5) = 2((x + 3)^2 - 9 + 5) = \\ &= 2((x + 3)^2 - 4) \end{aligned}$$

Hur man gör

Vi önskar kvadratkomplettera uttrycket $2x^2 + 12x + 10$.

För att vi ska kunna skriva om detta så att det innehåller en jämn kvadrat bör vi först tänka efter hur en jämn kvadrat ser ut:

$$(x + p)^2 = x^2 + 2px + p^2$$

Nu kan vi känna oss klara!

$$\begin{aligned} 2x^2 + 12x + 10 &= 2(x^2 + 6x + 5) = 2(x^2 + 2 \cdot 3x + 5) = \\ &= 2(x^2 + 2 \cdot 3x + 9 - 9 + 5) = 2((x + 3)^2 - 9 + 5) = \\ &= 2((x + 3)^2 - 4) = 2(x + 3)^2 - 8 \end{aligned}$$

Ett till exempel

Det här exemplet körs utan kommentarer. Tänk gärna igenom hur nästa steg i beräkningen bör se ut innan du trycker fram nästa bild.

$$3x^2 - 3x + 1$$

Ett till exempel

Det här exemplet körs utan kommentarer. Tänk gärna igenom hur nästa steg i beräkningen bör se ut innan du trycker fram nästa bild.

$$3x^2 - 3x + 1 = 3(x^2 - x + \frac{1}{3})$$

Ett till exempel

Det här exemplet körs utan kommentarer. Tänk gärna igenom hur nästa steg i beräkningen bör se ut innan du trycker fram nästa bild.

$$\begin{aligned}3x^2 - 3x + 1 &= 3\left(x^2 - x + \frac{1}{3}\right) \\ &= 3\left(x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\right)\end{aligned}$$

Ett till exempel

Det här exemplet körs utan kommentarer. Tänk gärna igenom hur nästa steg i beräkningen bör se ut innan du trycker fram nästa bild.

$$\begin{aligned}3x^2 - 3x + 1 &= 3(x^2 - x + \frac{1}{3}) \\ &= 3(x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}) \\ &= 3(x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x + (\frac{1}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{3})\end{aligned}$$

Ett till exempel

Det här exemplet körs utan kommentarer. Tänk gärna igenom hur nästa steg i beräkningen bör se ut innan du trycker fram nästa bild.

$$\begin{aligned}3x^2 - 3x + 1 &= 3(x^2 - x + \frac{1}{3}) \\ &= 3(x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}) \\ &= 3(x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x + (\frac{1}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{3}) \\ &= 3((x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{3})\end{aligned}$$

Ett till exempel

Det här exemplet körs utan kommentarer. Tänk gärna igenom hur nästa steg i beräkningen bör se ut innan du trycker fram nästa bild.

$$\begin{aligned}3x^2 - 3x + 1 &= 3(x^2 - x + \frac{1}{3}) \\ &= 3(x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}) \\ &= 3(x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x + (\frac{1}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{3}) \\ &= 3((x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{3}) \\ &= 3((x - \frac{1}{2})^2 - \frac{3}{12} + \frac{4}{12})\end{aligned}$$

Ett till exempel

Det här exemplet körs utan kommentarer. Tänk gärna igenom hur nästa steg i beräkningen bör se ut innan du trycker fram nästa bild.

$$\begin{aligned}3x^2 - 3x + 1 &= 3(x^2 - x + \frac{1}{3}) \\ &= 3(x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}) \\ &= 3(x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x + (\frac{1}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{3}) \\ &= 3((x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{3}) \\ &= 3((x - \frac{1}{2})^2 - \frac{3}{12} + \frac{4}{12}) \\ &= 3((x - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{12})\end{aligned}$$

Ett till exempel

Det här exemplet körs utan kommentarer. Tänk gärna igenom hur nästa steg i beräkningen bör se ut innan du trycker fram nästa bild.

$$\begin{aligned}3x^2 - 3x + 1 &= 3(x^2 - x + \frac{1}{3}) \\&= 3(x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}) \\&= 3(x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x + (\frac{1}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{3}) \\&= 3((x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{3}) \\&= 3((x - \frac{1}{2})^2 - \frac{3}{12} + \frac{4}{12}) \\&= 3((x - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{12}) \\&= 3(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{12}\end{aligned}$$

Ett till exempel

Det här exemplet körs utan kommentarer. Tänk gärna igenom hur nästa steg i beräkningen bör se ut innan du trycker fram nästa bild.

$$\begin{aligned}3x^2 - 3x + 1 &= 3(x^2 - x + \frac{1}{3}) \\&= 3(x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}) \\&= 3(x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x + (\frac{1}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{3}) \\&= 3((x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{3}) \\&= 3((x - \frac{1}{2})^2 - \frac{3}{12} + \frac{4}{12}) \\&= 3((x - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{12}) \\&= 3(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{12} \\&= 3(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Ett till exempel

Det här exemplet körs utan kommentarer. Tänk gärna igenom hur nästa steg i beräkningen bör se ut innan du trycker fram nästa bild.

$$\begin{aligned}3x^2 - 3x + 1 &= 3(x^2 - x + \frac{1}{3}) \\&= 3(x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}) \\&= 3(x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x + (\frac{1}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{3}) \\&= 3((x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{3}) \\&= 3((x - \frac{1}{2})^2 - \frac{3}{12} + \frac{4}{12}) \\&= 3((x - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{12}) \\&= 3(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{12} \\&= 3(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Klart!

Vad ska det här vara bra för?

I vilken situation är den kvadratkompletterade formen att föredra?

Vad ska det här vara bra för?

I vilken situation är den kvadratkompletterade formen att föredra?

- ▶ Den är lätt att **faktorisera**, om man tar konjugatregeln till hjälp:

$$\begin{aligned}2((x + 3)^2 - 4) &= 2((x + 3)^2 - 2^2) = \\ &= 2((x + 3) + 2)((x + 3) - 2) = 2(x + 5)(x + 1)\end{aligned}$$

Vad ska det här vara bra för?

I vilken situation är den kvadratkompletterade formen att föredra?

- ▶ Den är lätt att **faktorisera**, om man tar konjugatregeln till hjälp:

$$\begin{aligned}2((x + 3)^2 - 4) &= 2((x + 3)^2 - 2^2) = \\ &= 2((x + 3) + 2)((x + 3) - 2) = 2(x + 5)(x + 1)\end{aligned}$$

- ▶ Man kan också se om faktorisering är omöjlig:

$$\underbrace{3\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} = \text{Minst } \frac{1}{4}$$

Kan inte bli negativ

Faktorerna i polynom motsvarar nollställena, och det här uttrycket kan inte bli mindre än $\frac{1}{4}$. Det saknar nollställena och går inte att faktorisera (såvida vi inte övergår till komplexa tal).

Vad ska det här vara bra för?

I vilken situation är den kvadratkompletterade formen att föredra?

- ▶ Den är lätt att **faktorisera**, om man tar konjugatregeln till hjälp:

$$\begin{aligned}2((x + 3)^2 - 4) &= 2((x + 3)^2 - 2^2) = \\ &= 2((x + 3) + 2)((x + 3) - 2) = 2(x + 5)(x + 1)\end{aligned}$$

- ▶ Man kan också se om faktorisering är omöjlig:

$$\underbrace{3\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} = \text{Minst } \frac{1}{4}$$

Kan inte bli negativ

Faktorerna i polynom motsvarar nollställena, och det här uttrycket kan inte bli mindre än $\frac{1}{4}$. Det saknar nollställena och går inte att faktorisera (såvida vi inte övergår till komplexa tal).

- ▶ Man kan utläsa största eller minsta värde, på det sätt vi gör under föregående punkt.

Vad ska det här vara bra för?

I vilken situation är den kvadratkompletterade formen att föredra?

- ▶ Den är lätt att **faktorisera**, om man tar konjugatregeln till hjälp:

$$\begin{aligned}2((x + 3)^2 - 4) &= 2((x + 3)^2 - 2^2) = \\ &= 2((x + 3) + 2)((x + 3) - 2) = 2(x + 5)(x + 1)\end{aligned}$$

- ▶ Man kan också se om faktorisering är omöjlig:

$$\underbrace{3\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} = \text{Minst } \frac{1}{4}$$

Kan inte bli negativ

Faktorerna i polynom motsvarar nollställena, och det här uttrycket kan inte bli mindre än $\frac{1}{4}$. Det saknar nollställena och går inte att faktorisera (såvida vi inte övergår till komplexa tal).

- ▶ Man kan utläsa största eller minsta värde, på det sätt vi gör under föregående punkt.
- ▶ Det används vid lösandet av vissa sorters integraler och transformeringar.

Slutord

Det finns många fler situationer där kvadratkompletterad form har fördelar framför den vanliga. Och givetvis finns det situationer där den vanliga är att föredra (vid derivering är ett exempel).

Om du har några synpunkter på bildspelet så var snäll och maila dem till Hillevi.Gavel@mdh.se
så ska jag se om jag kan bearbeta det så att det blir bättre.