Polynomdivision

Steg-för-steg-demonstration

Hillevi Gavel

Institutionen för matematik och fysik (IMa)
Mälardalens högskola (MDH)

21 mars 2006

Instruktioner

Det här bildspelet visar hur man genomför en polynomdivision steg för steg. För att se nästa bild i spelet så klickar du på ”nästa sida” i din läsare, precis som man gör då man läser en vanlig text. Vill du titta på föregående bild igen så backar du på vanligt sätt.
Spelet inleds med en genomgång av division med tal, eftersom polynomdivision är en utvidgning av den metoden. Om du inte tycker att du behöver den genomgången så kan du gå direkt till polynomdivision genom att klicka på knappen nedan.
Avdelningen om polynomdivision inleds med en genomgång av hur man ska göra. Den följs av en förklaring av varför metoden ger rätt resultat. Sist kommer ett mer omfattande exempel, som tar upp några av de komplikationer som kan uppstå.

▸ Polynomdivision

"Vanlig" division

Polynomdivision följer samma beräkningsgång som division med tal. Eftersom en del lärare hoppar över det momentet i skolan, och eftersom även de som har lärt sig det kan ha glömt det har vi här en genomgång av det.

Du som redan kan det kan hoppa direkt till polynomdivisionen genom att klicka på knappen nedan. Det kan du också göra när som helst under genomgången av den här divisionsmetoden, ifall du inser att du vet hur fortsättningen ser ut.

▸ Polynomdivision

"Vanlig" division

Vi vill beräkna

$$\frac{8235}{3}$$

Polynomdivision

"Vanlig" division

Vi vill beräkna

$$\frac{8235}{3}$$

$$3 \,\underline{\big|\,8235}$$

Vi ritar upp en trappa. Täljaren står under trappan, nämnaren på trappsteget. (Det finns lite andra varianter på var man skriver vad, men principen för vad man sedan gör är densamma.)

▸ Polynomdivision

"Vanlig" division

Vi vill beräkna

$$\frac{8235}{3}$$

$$3\,\overline{\big)\,8235}$$

Nu tittar vi på siffran längst till höger i täljaren, tusentalssiffran 8.

▸ Polynomdivision

"Vanlig" division

Vi vill beräkna

$$\frac{8235}{3}$$

$$3 \,\overline{)\,8235}$$

Nu tittar vi på siffran längst till höger i täljaren, tusentalssiffran 8.
Hur många gånger går 3 i 8? Eller med andra ord: vad ska vi multiplicera 3 med för att få något som är så likt 8 som möjligt?

Polynomdivision

"Vanlig" division

Vi vill beräkna

$$\frac{8235}{3}$$

$$3 \,\overline{\big)\, \color{blue}{8}235}$$

$2 \cdot 3 = 6$, vilket är ganska likt 8.

▸ Polynomdivision

"Vanlig" division

Vi vill beräkna

$$\frac{8235}{3}$$

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ \hline 3 & 8235 \\ & 6 \end{array}$$

$2 \cdot 3 = 6$, vilket är ganska likt 8.
Vi skriver in det vi multiplicerade med ovanför 8:an i trappan, och resultatet under.

Polynomdivision

"Vanlig" division

Vi vill beräkna

$$\frac{8235}{3}$$

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ \hline 3 & 8235 \\ & \underline{6} \\ & {\color{blue}2} \end{array}$$

Vi subtraherar 6:an från 8:an, och skriver resultatet under.

▸ Polynomdivision

"Vanlig" division

Vi vill beräkna

$$\frac{8235}{3}$$

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ \hline 3 & 8\color{blue}{2}35 \\ & 6 \\ \cline{2-2} & 2\color{blue}{2} \end{array}$$

Vi flyttar ner hundratalssiffran, och ställer den bredvid.

▸ Polynomdivision

"Vanlig" division

Vi vill beräkna

$$\frac{8235}{3}$$

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ \hline 3 & 8235 \\ & 6 \\ \cline{2-2} & 22 \end{array}$$

Hur många gånger går 3 i 22?

Polynomdivision

"Vanlig" division

Vi vill beräkna

$$\frac{8235}{3}$$

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ \hline 3 & 8235 \\ & 6 \\ \cline{2-2} & 22 \end{array}$$

Hur många gånger går 3 i 22?
$7 \cdot 3 = 21$, närmre än så kommer vi inte.

▸ Polynomdivision

"Vanlig" division

Vi vill beräkna

$$\frac{8235}{3}$$

$$\begin{array}{r|l} & 27 \\ \hline 3 & 8235 \\ & 6 \\ \cline{2-2} & 22 \\ & 21 \end{array}$$

Vi skriver det vi multiplicerade med ovanför hundratalssiffran, och resultatet under 22.

▸ Polynomdivision

"Vanlig" division

Vi vill beräkna

$$\frac{8235}{3}$$

$$\begin{array}{r|l} & 27 \\ \hline 3 & 8235 \\ & 6 \\ \cline{2-2} & 22 \\ & 21 \\ \cline{2-2} & \color{blue}{1} \end{array}$$

Vi subtraherar.

Polynomdivision

"Vanlig" division

Vi vill beräkna

$$\frac{8235}{3}$$

$$\begin{array}{r|l} & 27 \\ \hline 3 & 8235 \\ \cline{1-1} & 6 \\ \cline{2-2} & 22 \\ & 21 \\ \cline{2-2} & \ \ 1\textcolor{blue}{3} \end{array}$$

Vi flyttar ner nästa siffra.

Polynomdivision

"Vanlig" division

Vi vill beräkna

$$\frac{8235}{3}$$

$$\begin{array}{r|l} & 27 \\ \hline 3 & 8235 \\ & 6 \\ \cline{2-2} & 22 \\ & 21 \\ \cline{2-2} & \;\;13 \end{array}$$

$4 \cdot 3 = 12$, vilket är ganska likt 13.

Polynomdivision

"Vanlig" division

Vi vill beräkna

$$\frac{8235}{3}$$

$$\begin{array}{r|l} & 274\color{blue}{4} \\ \hline 3 & 8235 \\ & 6 \\ \cline{2-2} & 22 \\ & 21 \\ \cline{2-2} & \ \ 13 \\ & \ \ \color{blue}{12} \end{array}$$

Vi skriver in ovanför och under.

▸ Polynomdivision

"Vanlig" division

Vi vill beräkna

$$\frac{8235}{3}$$

$$\begin{array}{r|l} & 274 \\ \hline 3 & 8235 \\ & 6 \\ \cline{2-2} & 22 \\ & 21 \\ \cline{2-2} & 13 \\ & 12 \\ \cline{2-2} & 1 \end{array}$$

Vi subtraherar.

Polynomdivision

"Vanlig" division

Vi vill beräkna

$$\frac{8235}{3}$$

$$\begin{array}{r|l} & 274 \\ \hline 3 & 8235 \\ \cline{1-1} & 6 \\ \cline{2-2} & 22 \\ & 21 \\ \cline{2-2} & \ \ 13 \\ & \ \ 12 \\ \cline{2-2} & \ \ \ \ 15 \end{array}$$

Vi flyttar ner.

Polynomdivision

"Vanlig" division

Vi vill beräkna

$$\frac{8235}{3}$$

$$\begin{array}{r|l} & 274 \\ \hline 3 & 8235 \\ & 6 \\ \cline{2-2} & 22 \\ & 21 \\ \cline{2-2} & 13 \\ & 12 \\ \cline{2-2} & 15 \end{array}$$

$5 \cdot 3 = 15$, vilket till och med exakt är lika med 15.

Polynomdivision

"Vanlig" division

Vi vill beräkna

$$\frac{8235}{3}$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 274\color{blue}{5} \\
\hline
3 & 8235 \\
 & \underline{6} \\
 & 22 \\
 & \underline{21} \\
 & 13 \\
 & \underline{12} \\
 & 15 \\
 & \color{blue}{15}
\end{array}
$$

Vi skriver in.

▸ Polynomdivision

"Vanlig" division

Vi vill beräkna

$$\frac{8235}{3}$$

$$\begin{array}{r|l} & 2745 \\ \hline 3 & 8235 \\ & \underline{6} \\ & 22 \\ & \underline{21} \\ & 13 \\ & \underline{12} \\ & 15 \\ & \underline{15} \\ & 0 \end{array}$$

Vi subtraherar. Och nu finns det inget kvar att flytta ner, så vi slutar här.

▸ Polynomdivision

"Vanlig" division

Resultatet är

$$\frac{8235}{3} = 2745$$

$$\begin{array}{r|l} & \overline{2745} \\ 3 & 8235 \\ \hline & \underline{6} \\ & 22 \\ & \underline{21} \\ & 13 \\ & \underline{12} \\ & 15 \\ & \underline{15} \\ & 0 \end{array}$$

▸ Polynomdivision

"Vanlig" division

Resultatet är

$$\frac{8235}{3}$$

Men vad var det egentligen som vi gjorde?

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2745 \\ \cline{2-2}
3 & 8235 \\ \cline{1-1}
 & 6 \\ \cline{2-2}
 & 22 \\
 & 21 \\ \cline{2-2}
 & 13 \\
 & 12 \\ \cline{2-2}
 & 15 \\
 & 15 \\ \cline{2-2}
 & 0
\end{array}
$$

▸ Polynomdivision

"Vanlig" division

Resultatet är

$$\frac{8235}{3}$$

Men vad var det egentligen som vi gjorde?

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2745 \\
\cline{2-2}
3 & 8235 \\
\cline{1-1}
 & 6 \\
\cline{2-2}
 & 22 \\
 & 21 \\
\cline{2-2}
 & 13 \\
 & 12 \\
\cline{2-2}
 & 15 \\
 & 15 \\
\cline{2-2}
 & 0
\end{array}
$$

Ett sätt att se på saken är så här: 3 personer ska dela på 8235 kronor. De börjar med att dela på 1000-lapparna. De får 2 var, och det blir 2 över. Dessa växlas och läggs till 100-lapparna, som man nu har 22 av. Det blir 7 var, och en över. Den växlas och läggs till 10:orna. 13 10:or, det blir 4 var, och en växlas till 1-kronor. Ihop med de 5 kronor man redan hade blir det 15, vilket ger 5 var, och nu är pengarna slut. 2 tusen 7 hundra 4 tio 5 kronor var, alltså.

Polynomdivision

Polynomdivision

Hur man gör

Vi ska beräkna

$$\frac{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1}{x + 1}$$

Polynomdivision

Hur man gör

Vi ska beräkna

$$\frac{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1}{x + 1}$$

$$\begin{array}{r|l} \underline{x+1} & \overline{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1} \end{array}$$

Vi ritar upp en trappa. Täljaren står under trappan, nämnaren på trappsteget.

Polynomdivision

Hur man gör

Vi ska beräkna

$$\frac{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1}{x + 1}$$

$$x + 1 \,\big|\, \overline{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1}$$

Vad ska vi multiplicera nämnaren $x + 1$ med för att få något som är så likt täljaren som möjligt?

Polynomdivision

Hur man gör

Vi ska beräkna

$$\frac{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1}{x + 1}$$

$$x+1 \,\overline{\smash{\big)}\, x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1}$$

Om vi multiplicerar $x + 1$ med x^3 så får vi $x^4 + x^3$. Det är ganska likt.

Polynomdivision

Hur man gör

Vi ska beräkna

$$\frac{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1}{x + 1}$$

$$\begin{array}{r|l} & \color{blue}{x^3} \\ \hline x + 1 & x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 \\ & \color{blue}{x^4 + x^3} \end{array}$$

Vi skriver in det vi multiplicerade med ovanpå trappan och produkten under.

Polynomdivision

Hur man gör

Vi ska beräkna

$$\frac{x^4+4x^3+6x^2+4x+1}{x+1}$$

$$\begin{array}{r|l} & x^3 \\ \hline x+1 & x^4+4x^3+6x^2+4x+1 \\ & -(x^4+\ \ x^3) \\ \cline{2-2} & \quad\ \ \color{blue}{3x^3} \end{array}$$

Vi subtraherar produkten från täljaren.

Polynomdivision

Hur man gör

Vi ska beräkna

$$\frac{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1}{x + 1}$$

$$\begin{array}{r|l} & \;\; x^3 \\ \hline x+1 & x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 \\ & -(x^4 + \;\; x^3) \\ \cline{2-2} & \qquad\;\; 3x^3 + 6x^2 \end{array}$$

Vi "flyttar ner" nästa term.

Polynomdivision

Hur man gör

Vi ska beräkna

$$\frac{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1}{x + 1}$$

$$\begin{array}{r|l} & \quad x^3 \\ \hline x+1 & x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 \\ & -(x^4 + \ \ x^3) \\ \cline{2-2} & \qquad\quad 3x^3 + 6x^2 \end{array}$$

Vad ska vi multiplicera $x + 1$ med för att få något som är så likt $3x^3 + 6x^2$ som möjligt?

Polynomdivision

Hur man gör

Vi ska beräkna

$$\frac{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1}{x + 1}$$

$$\begin{array}{r|l} & \quad\; x^3 \\ \hline x+1 & x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 \\ & -(x^4 + \;\; x^3) \\ \cline{2-2} & \qquad\quad 3x^3 + 6x^2 \end{array}$$

Om vi multiplicerar $x + 1$ med $3x^2$ så får vi $3x^3 + 3x^2$.

Polynomdivision

Hur man gör

Vi ska beräkna

$$\frac{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1}{x + 1}$$

$$\begin{array}{r|l} & x^3 + 3x^2 \\ \hline x+1 & x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 \\ & -(x^4 + x^3) \\ \cline{2-2} & 3x^3 + 6x^2 \\ & 3x^3 + 3x^2 \end{array}$$

Vi skriver det vi multiplicerade med ovanpå och produkten under.

Polynomdivision

Hur man gör

Vi ska beräkna

$$\frac{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1}{x + 1}$$

$$\begin{array}{r|l}
 & \quad x^3 + 3x^2 \\
\hline
x + 1 & x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 \\
 & -(x^4 + x^3) \\
\cline{2-2}
 & \qquad 3x^3 + 6x^2 \\
 & \quad -(3x^3 + 3x^2) \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad \color{blue}{3x^2}
\end{array}$$

Vi subtraherar.

Polynomdivision

Hur man gör

Vi ska beräkna

$$\frac{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1}{x + 1}$$

$$\begin{array}{r|l}
 & x^3 + 3x^2 \\ \hline
x + 1 & x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 \\
 & -(x^4 + x^3) \\ \hline
 & 3x^3 + 6x^2 \\
 & -(3x^3 + 3x^2) \\ \hline
 & 3x^2 + 4x
\end{array}$$

Vi flyttar ner nästa term.

Polynomdivision

Hur man gör

Vi ska beräkna

$$\frac{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1}{x + 1}$$

$$\begin{array}{r|l} & x^3 + 3x^2 \\ \hline x + 1 & x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 \\ & -(x^4 + x^3) \\ \hline & 3x^3 + 6x^2 \\ & -(3x^3 + 3x^2) \\ \hline & 3x^2 + 4x \end{array}$$

Vad ska vi multiplicera $x + 1$ med för att få något som är så likt $3x^2 + 4x$ som möjligt?

Polynomdivision

Hur man gör

Vi ska beräkna

$$\frac{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1}{x + 1}$$

$$\begin{array}{r|l} & x^3 + 3x^2 \\ \hline x + 1 & x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 \\ & -(x^4 + x^3) \\ \cline{2-2} & 3x^3 + 6x^2 \\ & -(3x^3 + 3x^2) \\ \cline{2-2} & 3x^2 + 4x \end{array}$$

Om vi multiplicerar $x + 1$ med $3x$ så får vi $3x^2 + 3x$.

Polynomdivision

Hur man gör

Vi ska beräkna

$$\frac{x^4+4x^3+6x^2+4x+1}{x+1}$$

$$\begin{array}{r|l}
 & x^3 + 3x^2 + 3x \\
\hline
x+1 & x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 \\
 & -(x^4 + x^3) \\
\hline
 & 3x^3 + 6x^2 \\
 & -(3x^3 + 3x^2) \\
\hline
 & 3x^2 + 4x \\
 & 3x^2 + 3x
\end{array}$$

Vi skriver in värdena.

Polynomdivision

Hur man gör

Vi ska beräkna

$$\frac{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1}{x + 1}$$

$$\begin{array}{r|l}
 & \quad x^3 + 3x^2 + 3x \\ \hline
x + 1 & x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 \\
 & -(x^4 + x^3) \\ \hline
 & \quad 3x^3 + 6x^2 \\
 & \quad -(3x^3 + 3x^2) \\ \hline
 & \qquad 3x^2 + 4x \\
 & \qquad -(3x^2 + 3x) \\ \hline
 & \qquad\qquad x
\end{array}$$

Vi subtraherar.

Polynomdivision

Hur man gör

Vi ska beräkna

$$\frac{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1}{x + 1}$$

$$\begin{array}{r|l}
 & x^3 + 3x^2 + 3x \\
\hline
x + 1 & x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x \color{blue}{+ 1} \\
 & -(x^4 + x^3) \\
\cline{2-2}
 & 3x^3 + 6x^2 \\
 & -(3x^3 + 3x^2) \\
\cline{2-2}
 & 3x^2 + 4x \\
 & -(3x^2 + 3x) \\
\cline{2-2}
 & x \color{blue}{+ 1}
\end{array}$$

Vi flyttar ner nästa term.

Polynomdivision

Hur man gör

Vi ska beräkna

$$\frac{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1}{x + 1}$$

$$\begin{array}{r|l}
 & x^3 + 3x^2 + 3x \\
\hline
x + 1 & x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 \\
 & -(x^4 + x^3) \\
\cline{2-2}
 & 3x^3 + 6x^2 \\
 & -(3x^3 + 3x^2) \\
\cline{2-2}
 & 3x^2 + 4x \\
 & -(3x^2 + 3x) \\
\cline{2-2}
 & x + 1
\end{array}$$

Vad ska vi multiplicera $x + 1$ med för att få något som är så likt $x + 1$ som möjligt?

Polynomdivision

Hur man gör

Vi ska beräkna

$$\frac{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1}{x + 1}$$

$$\begin{array}{r|l}
 & x^3 + 3x^2 + 3x \\ \hline
x + 1 & x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 \\
 & -(x^4 + x^3) \\ \cline{2-2}
 & 3x^3 + 6x^2 \\
 & -(3x^3 + 3x^2) \\ \cline{2-2}
 & 3x^2 + 4x \\
 & -(3x^2 + 3x) \\ \cline{2-2}
 & x + 1
\end{array}$$

Multiplikation med 1 verkar bra.

Polynomdivision

Hur man gör

Vi ska beräkna

$$\frac{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1}{x + 1}$$

$$\begin{array}{r@{\,}l}
 & x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\ \cline{2-2}
x + 1 & \big) \; x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 \\
 & -(x^4 + \; x^3) \\ \cline{2-2}
 & \quad 3x^3 + 6x^2 \\
 & \quad -(3x^3 + 3x^2) \\ \cline{2-2}
 & \qquad 3x^2 + 4x \\
 & \qquad -(3x^2 + 3x) \\ \cline{2-2}
 & \qquad\qquad x + 1 \\
 & \qquad\qquad x + 1
\end{array}$$

Vi skriver in värdena.

Polynomdivision

Hur man gör

Vi ska beräkna

$$\frac{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1}{x + 1}$$

$$\begin{array}{r|l}
 & x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\
\hline
x + 1 & x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 \\
 & -(x^4 + x^3) \\
\cline{2-2}
 & 3x^3 + 6x^2 \\
 & -(3x^3 + 3x^2) \\
\cline{2-2}
 & 3x^2 + 4x \\
 & -(3x^2 + 3x) \\
\cline{2-2}
 & x + 1 \\
 & -(x + 1) \\
\cline{2-2}
 & 0
\end{array}$$

När vi nu subtraherar så har vi inget kvar. Divisionen gick jämnt ut.

Polynomdivision

Hur man gör

Resultatet blev

$$\frac{x^4+4x^3+6x^2+4x+1}{x+1} = x^3+3x^2+3x+1$$

$$\begin{array}{r|l}
 & x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\
\hline
x+1 & x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 \\
 & -(x^4 + x^3) \\
\hline
 & 3x^3 + 6x^2 \\
 & -(3x^3 + 3x^2) \\
\hline
 & 3x^2 + 4x \\
 & -(3x^2 + 3x) \\
\hline
 & x + 1 \\
 & -(x + 1) \\
\hline
 & 0
\end{array}$$

Polynomdivision

Varför det fungerar

Hur kommer det sig att vi fick fram rätt resultat med den här metoden?

Polynomdivision

Varför det fungerar

Vi tittar på beräkningen igen:

$$
\begin{array}{r|l}
 & \phantom{x^4 + {}} x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\
\hline
x+1 & x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 \\
 & -(x^4 + x^3) \\
 & \phantom{x^4 + {}} 3x^3 + 6x^2 \\
 & \phantom{x^4 + {}} -(3x^3 + 3x^2) \\
 & \phantom{x^4 + 4x^3 + {}} 3x^2 + 4x \\
 & \phantom{x^4 + 4x^3 + {}} -(3x^2 + 3x) \\
 & \phantom{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + {}} x + 1 \\
 & \phantom{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + {}} -(x + 1) \\
 & \phantom{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + {}} 0
\end{array}
$$

Polynomdivision

Varför det fungerar

Vad är det egentligen som händer?

$$
\begin{array}{rl}
 & x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\
x+1 \big) & x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 \\
 & -(x^4 + x^3) \\
\hline
 & 3x^3 + 6x^2 \\
 & -(3x^3 + 3x^2) \\
\hline
 & 3x^2 + 4x \\
 & -(3x^2 + 3x) \\
\hline
 & x + 1 \\
 & -(x + 1) \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

Polynomdivision

Varför det fungerar

Vi startar med täljaren.

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\
\hline
x + 1 & x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 \\
 & -(x^4 + x^3) \\
\cline{2-2}
 & 3x^3 + 6x^2 \\
 & -(3x^3 + 3x^2) \\
\cline{2-2}
 & 3x^2 + 4x \\
 & -(3x^2 + 3x) \\
\cline{2-2}
 & x + 1 \\
 & -(x + 1) \\
\cline{2-2}
 & 0
\end{array}
$$

$$x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$$

Polynomdivision

Varför det fungerar

Ur täljaren "plockar vi loss" en maximalt stor multipel av nämnaren $x+1$.
Då har vi kvar $3x^3+6x^2+4x+1$.

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^3+3x^2+3x+1 \\
\hline
x+1 & x^4+4x^3+6x^2+4x+1 \\
 & -(x^4+x^3) \\
 & \quad 3x^3+6x^2 \\
 & \quad -(3x^3+3x^2) \\
 & \qquad 3x^2+4x \\
 & \qquad -(3x^2+3x) \\
 & \qquad\quad x+1 \\
 & \qquad\quad -(x+1) \\
 & \qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$$x^4+4x^3+6x^2+4x+1 =$$
$$=(x^4+x^3)+3x^3+6x^2+4x+1$$

Polynomdivision

Varför det fungerar

Ur det vi har kvar plockar vi loss en ny maximalstor multipel av $x+1$, och då har vi kvar $3x^2+4x+1$.

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\
\hline
x+1 & x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 \\
 & -(x^4 + x^3) \\
 & \quad 3x^3 + 6x^2 \\
 & \quad -(3x^3 + 3x^2) \\
 & \qquad 3x^2 + 4x \\
 & \qquad -(3x^2 + 3x) \\
 & \qquad\quad x + 1 \\
 & \qquad\quad -(x+1) \\
 & \qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 &= \\
&= (x^4 + x^3) + 3x^3 + 6x^2 + 4x + 1 \\
&= (x^4 + x^3) + (3x^3 + 3x^2) \\
&\quad + 3x^2 + 4x + 1
\end{aligned}
$$

Polynomdivision

Varför det fungerar

Vi plockar loss ännu en multipel. Då har vi kvar $x+1$, vilket vi ju ser är en multipel av $x+1$.

$$
\begin{array}{r|l}
\multicolumn{2}{r}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1} \\
\cline{2-2}
x+1 & x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 \\
 & -(x^4 + x^3) \\
 & \quad 3x^3 + 6x^2 \\
 & \quad -(3x^3 + 3x^2) \\
 & \qquad 3x^2 + 4x \\
 & \qquad -(3x^2 + 3x) \\
 & \qquad\qquad x + 1 \\
 & \qquad\qquad -(x + 1) \\
 & \qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 &= \\
&= (x^4 + x^3) + 3x^3 + 6x^2 + 4x + 1 \\
&= (x^4 + x^3) + (3x^3 + 3x^2) \\
&\qquad + 3x^2 + 4x + 1 \\
&= (x^4 + x^3) + (3x^3 + 3x^2) \\
&\qquad + (3x^2 + 3x) + x + 1
\end{aligned}
$$

Polynomdivision

Varför det fungerar

Vi kan nu bryta ut det vi multiplicerade med ur uttrycken.

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\
\hline
x+1 & x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 \\
 & -(x^4 + x^3) \\
\hline
 & 3x^3 + 6x^2 \\
 & -(3x^3 + 3x^2) \\
\hline
 & 3x^2 + 4x \\
 & -(3x^2 + 3x) \\
\hline
 & x + 1 \\
 & -(x+1) \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 &= \\
&= (x^4 + x^3) + 3x^3 + 6x^2 + 4x + 1 \\
&= (x^4 + x^3) + (3x^3 + 3x^2) \\
&\qquad + 3x^2 + 4x + 1 \\
&= (x^4 + x^3) + (3x^3 + 3x^2) \\
&\qquad + (3x^2 + 3x) + x + 1 \\
&= x^3(x+1) + 3x^2(x+1) \\
&\qquad + 3x(x+1) + 1 \cdot (x+1)
\end{aligned}
$$

Polynomdivision

Varför det fungerar

Vi kan nu bryta ut det vi multiplicerade med ur uttrycken.
Och sedan kan vi bryta ut den gemensamma faktorn $x+1$.

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\
\hline
x+1 & x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 \\
 & -(x^4 + x^3) \\
\hline
 & 3x^3 + 6x^2 \\
 & -(3x^3 + 3x^2) \\
\hline
 & 3x^2 + 4x \\
 & -(3x^2 + 3x) \\
\hline
 & x + 1 \\
 & -(x+1) \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 &= \\
&= (x^4 + x^3) + 3x^3 + 6x^2 + 4x + 1 \\
&= (x^4 + x^3) + (3x^3 + 3x^2) \\
&\quad + 3x^2 + 4x + 1 \\
&= (x^4 + x^3) + (3x^3 + 3x^2) \\
&\quad + (3x^2 + 3x) + x + 1 \\
&= x^3(x+1) + 3x^2(x+1) \\
&\quad + 3x(x+1) + 1 \cdot (x+1) \\
&= (x^3 + 3x^2 + 3x + 1)(x+1)
\end{aligned}
$$

Polynomdivision

Varför det fungerar

Vi har konstaterat att

$$x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 = (x^3 + 3x^2 + 3x + 1)(x + 1)$$

$$\begin{array}{r|l}
 & x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\ \hline
x + 1 & x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 \\
 & -(x^4 + x^3) \\ \cline{2-2}
 & 3x^3 + 6x^2 \\
 & -(3x^3 + 3x^2) \\ \cline{2-2}
 & 3x^2 + 4x \\
 & -(3x^2 + 3x) \\ \cline{2-2}
 & x + 1 \\
 & -(x + 1) \\ \cline{2-2}
 & 0
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
& x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 = \\
&= (x^4 + x^3) + 3x^3 + 6x^2 + 4x + 1 \\
&= (x^4 + x^3) + (3x^3 + 3x^2) \\
&\qquad + 3x^2 + 4x + 1 \\
&= (x^4 + x^3) + (3x^3 + 3x^2) \\
&\qquad + (3x^2 + 3x) + x + 1 \\
&= x^3(x + 1) + 3x^2(x + 1) \\
&\qquad + 3x(x + 1) + 1 \cdot (x + 1) \\
&= (x^3 + 3x^2 + 3x + 1)(x + 1)
\end{aligned}$$

Polynomdivision

Varför det fungerar

Det är samma sak som att

$$\frac{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1}{x + 1} = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

$$\begin{array}{r|l}
 & x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\
\hline
x + 1 & x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 \\
 & -(x^4 + x^3) \\
\hline
 & 3x^3 + 6x^2 \\
 & -(3x^3 + 3x^2) \\
\hline
 & 3x^2 + 4x \\
 & -(3x^2 + 3x) \\
\hline
 & x + 1 \\
 & -(x + 1) \\
\hline
 & 0
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 &= \\
&= (x^4 + x^3) + 3x^3 + 6x^2 + 4x + 1 \\
&= (x^4 + x^3) + (3x^3 + 3x^2) \\
&\qquad + 3x^2 + 4x + 1 \\
&= (x^4 + x^3) + (3x^3 + 3x^2) \\
&\qquad + (3x^2 + 3x) + x + 1 \\
&= x^3(x + 1) + 3x^2(x + 1) \\
&\qquad + 3x(x + 1) + 1 \cdot (x + 1) \\
&= (x^3 + 3x^2 + 3x + 1)(x + 1)
\end{aligned}$$

Polynomdivision

Ett större exempel

Beräkna $\dfrac{x^5 + 6x^4 + x^3 - 27x^2 + 25}{x^2 + 2x - 4}$

Polynomdivision

Ett större exempel

Beräkna $\dfrac{x^5 + 6x^4 + x^3 - 27x^2 + 25}{x^2 + 2x - 4}$

Vi ställer upp trappan. Det finns ingen förstagradsterm i täljaren men vi tar ändå och lämnar plats för en sådan. Det kan uppkomma förstagradstermer under beräkningens gång, och den blir läsligare om det finns någonstans att skriva dem.

$$x^2 + 2x - 4 \,\big|\, \overline{x^5 + 6x^4 + x^3 - 27x^2 \qquad + 25}$$

Polynomdivision

Ett större exempel

Beräkna $\dfrac{x^5 + 6x^4 + x^3 - 27x^2 + 25}{x^2 + 2x - 4}$

Vi multiplicerar nämnaren med x^3 för att få bort 5:e-gradstermen.

$$
\begin{array}{r|l}
 & \phantom{x^5 + 6x^4 + {}} x^3 \\
\hline
x^2 + 2x - 4 & x^5 + 6x^4 + x^3 - 27x^2 \qquad + 25 \\
 & x^5 + 2x^4 - 4x^3
\end{array}
$$

Polynomdivision

Ett större exempel

Beräkna $\dfrac{x^5 + 6x^4 + x^3 - 27x^2 + 25}{x^2 + 2x - 4}$

Vi subtraherar.

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^3 \\
\hline
x^2 + 2x - 4 & x^5 + 6x^4 + \ \ x^3 - 27x^2 \qquad\qquad + 25 \\
 & -(x^5 + 2x^4 - 4x^3) \\
\cline{2-2}
 & 4x^4 + 5x^3
\end{array}
$$

Polynomdivision

Ett större exempel

Beräkna $\dfrac{x^5 + 6x^4 + x^3 - 27x^2 + 25}{x^2 + 2x - 4}$

Vi flyttar ner nästa term

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad x^3 \\
\hline
x^2 + 2x - 4 & x^5 + 6x^4 + x^3 - 27x^2 \qquad + 25 \\
 & -(x^5 + 2x^4 - 4x^3) \\
\cline{2-2}
 & \qquad 4x^4 + 5x^3 - 27x^2
\end{array}
$$

Polynomdivision

Ett större exempel

Beräkna $\dfrac{x^5 + 6x^4 + x^3 - 27x^2 + 25}{x^2 + 2x - 4}$

Vi multiplicerar med $4x^2$ för att få bort 4:e-gradstermen.

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^3 + 4x^2 \\
\hline
x^2 + 2x - 4 & x^5 + 6x^4 + x^3 - 27x^2 \qquad + 25 \\
 & -(x^5 + 2x^4 - 4x^3) \\
\cline{2-2}
 & \qquad 4x^4 + 5x^3 - 27x^2 \\
 & \qquad 4x^4 + 8x^3 - 16x^2
\end{array}
$$

Polynomdivision

Ett större exempel

Beräkna $\dfrac{x^5+6x^4+x^3-27x^2+25}{x^2+2x-4}$

Vi subtraherar.

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^3 + 4x^2 \\
\hline
x^2+2x-4 & x^5 + 6x^4 + x^3 - 27x^2 \qquad + 25 \\
 & -(x^5 + 2x^4 - 4x^3) \\
\cline{2-2}
 & 4x^4 + 5x^3 - 27x^2 \\
 & -(4x^4 + 8x^3 - 16x^2) \\
\cline{2-2}
 & {\color{blue} - 3x^3 - 11x^2}
\end{array}
$$

Polynomdivision

Ett större exempel

Beräkna $\dfrac{x^5 + 6x^4 + x^3 - 27x^2 + 25}{x^2 + 2x - 4}$

Här finns det ingen term som behöver flyttas ner. (Den konstanta termen kommer inte att bli intressant förrän i nästa steg.)

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^3 + 4x^2 \\
\hline
x^2 + 2x - 4 & x^5 + 6x^4 + x^3 - 27x^2 \qquad + 25 \\
 & -(x^5 + 2x^4 - 4x^3) \\
\cline{2-2}
 & \quad 4x^4 + 5x^3 - 27x^2 \\
 & \quad -(4x^4 + 8x^3 - 16x^2) \\
\cline{2-2}
 & \qquad -3x^3 - 11x^2
\end{array}
$$

Polynomdivision

Ett större exempel

Beräkna $\dfrac{x^5+6x^4+x^3-27x^2+25}{x^2+2x-4}$

Vi multiplicerar med $-3x$ för att få bort 3:e-gradstermen. (Här ser vi också att det var klokt att lämna plats för en förstagradsterm.)

$$
\begin{array}{rrrrrrr}
 & & & x^3 + & 4x^2 - & 3x & \\ \cline{2-7}
x^2+2x-4 & \multicolumn{1}{|r}{x^5 + 6x^4 +} & & x^3 - & 27x^2 & & +25 \\
 & -(x^5 + 2x^4 - & & 4x^3) & & & \\ \cline{2-5}
 & & 4x^4 + & 5x^3 - & 27x^2 & & \\
 & & -(4x^4 + & 8x^3 - & 16x^2) & & \\ \cline{3-5}
 & & & -3x^3 - & 11x^2 & & \\
 & & & -3x^3 - & 6x^2 & +12x & \\
\end{array}
$$

Polynomdivision

Ett större exempel

Beräkna $\dfrac{x^5+6x^4+x^3-27x^2+25}{x^2+2x-4}$

Vi subtraherar.

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^3 + 4x^2 - 3x \\
\hline
x^2+2x-4 & x^5 + 6x^4 + x^3 - 27x^2 \qquad + 25 \\
 & -(x^5 + 2x^4 - 4x^3) \\
\cline{2-2}
 & \quad 4x^4 + 5x^3 - 27x^2 \\
 & -(4x^4 + 8x^3 - 16x^2) \\
\cline{2-2}
 & \qquad - 3x^3 - 11x^2 \\
 & \qquad -(-3x^3 - 6x^2 + 12x) \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad - 5x^2 - 12x
\end{array}
$$

Polynomdivision

Ett större exempel

Beräkna $\dfrac{x^5 + 6x^4 + x^3 - 27x^2 + 25}{x^2 + 2x - 4}$

Nu är det dags att flytta ner konstanta termen.

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^3 + 4x^2 - 3x \\
\hline
x^2 + 2x - 4 & x^5 + 6x^4 + x^3 - 27x^2 \qquad + 25 \\
 & -(x^5 + 2x^4 - 4x^3) \\
\cline{2-2}
 & \qquad 4x^4 + 5x^3 - 27x^2 \\
 & \quad -(4x^4 + 8x^3 - 16x^2) \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad -3x^3 - 11x^2 \\
 & \qquad -(-3x^3 - 6x^2 + 12x) \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad\qquad -5x^2 - 12x + 25
\end{array}
$$

Polynomdivision

Ett större exempel

Beräkna $\dfrac{x^5 + 6x^4 + x^3 - 27x^2 + 25}{x^2 + 2x - 4}$

Vi multiplicerar med -5 för att få bort andragradstermen.

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^3 + 4x^2 - 3x - 5 \\
\hline
x^2 + 2x - 4 & x^5 + 6x^4 + x^3 - 27x^2 + 25 \\
 & -(x^5 + 2x^4 - 4x^3) \\
 & \quad 4x^4 + 5x^3 - 27x^2 \\
 & \quad -(4x^4 + 8x^3 - 16x^2) \\
 & \qquad -3x^3 - 11x^2 \\
 & \qquad -(-3x^3 - 6x^2 + 12x) \\
 & \qquad\qquad -5x^2 - 12x + 25 \\
 & \qquad\qquad -5x^2 - 10x + 20
\end{array}
$$

Polynomdivision

Ett större exempel

Beräkna $\dfrac{x^5 + 6x^4 + x^3 - 27x^2 + 25}{x^2 + 2x - 4}$

Vi subtraherar.

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^3 + 4x^2 - 3x - 5 \\
\hline
x^2 + 2x - 4 & x^5 + 6x^4 + x^3 - 27x^2 + 25 \\
 & -(x^5 + 2x^4 - 4x^3) \\
\cline{2-2}
 & 4x^4 + 5x^3 - 27x^2 \\
 & -(4x^4 + 8x^3 - 16x^2) \\
\cline{2-2}
 & -3x^3 - 11x^2 \\
 & -(-3x^3 - 6x^2 + 12x) \\
\cline{2-2}
 & -5x^2 - 12x + 25 \\
 & -(-5x^2 - 10x + 20) \\
\cline{2-2}
 & -2x + 5
\end{array}
$$

Polynomdivision

Ett större exempel

Beräkna $\dfrac{x^5+6x^4+x^3-27x^2+25}{x^2+2x-4}$

Det finns ingenting som vi kan multiplicera andragradsuttrycket x^2+2x-4 med som kan ge oss ett förstagradsuttyck. Därför stannar beräkningen här. Denna division gick inte jämnt ut, utan vi fick resten $-2x+5$.

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^3 + 4x^2 - 3x - 5 \\
\hline
x^2+2x-4 & x^5 + 6x^4 + x^3 - 27x^2 + 25 \\
 & -(x^5 + 2x^4 - 4x^3) \\
 & \quad 4x^4 + 5x^3 - 27x^2 \\
 & \quad -(4x^4 + 8x^3 - 16x^2) \\
 & \qquad -3x^3 - 11x^2 \\
 & \qquad -(-3x^3 - 6x^2 + 12x) \\
 & \qquad\quad -5x^2 - 12x + 25 \\
 & \qquad\quad -(-5x^2 - 10x + 20) \\
 & \qquad\qquad -2x + 5
\end{array}
$$

Polynomdivision

Ett större exempel

$$\frac{x^5+6x^4+x^3-27x^2+25}{x^2+2x-4} = x^3+4x^2-3x-5+\frac{-2x+5}{x^2+2x-4}$$

$$\begin{array}{r|l}
 & \quad x^3 + 4x^2 - 3x - 5 \\ \hline
x^2+2x-4 & x^5+6x^4+x^3-27x^2 \qquad +25 \\
 & -(x^5+2x^4-4x^3) \\ \hline
 & \quad 4x^4+5x^3-27x^2 \\
 & -(4x^4+8x^3-16x^2) \\ \hline
 & \quad -3x^3-11x^2 \\
 & -(-3x^3-6x^2+12x) \\ \hline
 & \quad -5x^2-12x+25 \\
 & -(-5x^2-10x+20) \\ \hline
 & \quad -2x+5
\end{array}$$

Avslutning

Bildspelet är slut.
Om du har några synpunkter på det (till exempel saker som kan förbättras) så maila dem till `hillevi.gavel@mdh.se`.