2017-06-08

Handbok för volontärer

Detta dokument vänder sig till dig som vill bli volontär i Mattecentrum.

Om Mattecentrum

Mattecentrum är en ideell ungdomsförening vars målsättning är att höja kunskapsnivån och verka för likvärdig kunskapsinhämtning i matematik. Föreningen grundades i Stockholm år 2008 av Johan Wendt och har sedan dess spridit sig till flertalet städer runt om i landet.

Förutom verksamheten i Sverige har initiativ även tagits i Danmark under namnet **Matematikcenter** och i Norge under namnet **Mattesenter**.

Vision och värdegrund

Mattecentrum verkar för likvärdig kunskapsinhämtning i syfte att öka kunskapsnivån i och stimulera intresset för matematik bland barn och ungdomar. Alla, oavsett socioekonomisk bakgrund, skola eller kunskapsnivå, ska ges samma möjlighet att lära sig matematik.

Utöver att vara gratis och öppet för alla genomsyrar följande ledord verksamheten:

Engagemang: Mattecentrum stärker engagemanget för matematik bland elever, volontärer, samarbetspartners och samhälle.

Trygghet: Hos Mattecentrum är du, oavsett vem du är, trygg att be om hjälp utan att bedömas eller värderas.

Tillgänglighet: Mattecentrum tillgängliggör kunskapsutbyten i matematik, oberoende av tid, plats och person.

Så bli **E.T.T.** med Mattecentrum!

Verksamhetsområden

Mattecentrum ger gratis mattestöd på följande sätt:

Räknestugor

Mattecentrum arrangerar över hundra räknestugor varje vecka i skolor och bibliotek över hela landet. Räknestugorna vänder sig till alla som vill lära sig mer om matematik upp till gymnasienivå. Besökarna till räknestugorna behöver inte föranmäla sig. De har med sig eget material och frågor som sedan besvaras av dig och de andra volontärerna på plats.

Som volontär i räknestugan bidrar du inte enbart med svar och tankesätt kring matematik, utan även med att skapa en öppen miljö där elever känner sig trygga att ställa frågor. Volontärer är förebilder som kan visa på att matematik är mer än bara slentrianmässigt räknande i en mattebok.

Matteboken.se

Matteboken.se är ett pluggverktyg som samlar all matematik som lärs ut från årskurs 3 i grundskolan till matematik 5 på gymnasiet. Här finns bland annat teoriavsnitt, videolektioner, övningsuppgifter till varje matematikkurs, samt lösningar till nationella prov och högskoleprov. Grundskoledelen av Matteboken är översatt till arabiska och lanseras hösten 2016.

Som volontär kan du alltid använda dig av **Matteboken.se** för att fräscha upp minnet eller som stöd när du är aktiv i verksamheten. Tipsa gärna eleverna om **Matteboken.se**! Utöver ovan nämnda delar finns även en flik som heter Pluggknep för tips om studieteknik för elever.

Matteboken.se är ständigt under utveckling. Dina synpunkter och utvecklingsförslag är välkomna och uppskattas. Du skickar dessa till **feedback@matteboken.se**.

Mathplanet.com är en engelskspråkig motsvarighet till Matteboken.se, anpassad efter det amerikanska skolsystemet.

Pluggakuten.se

Pluggakuten.se är Sveriges största läxhjälpsforum, där frågor som rör alla skolämnen kan ställas. Här kan bland annat elever få hjälp med läxor, studieteknik och tips på hur studiemotivationen kan hållas uppe. Som volontär är du välkommen att skapa ett eget konto och svara på andras trådar och inlägg, eller skapa egna.

Formelsamlingen.se

Formelsamlingen.se är ett pluggverktyg som samlar alla formler i ämnena matematik, fysik och kemi som behövs i grundskolan och gymnasiet. Här finns även formelhäftena som ges ut till de nationella proven. Använd dig gärna av Formelsamlingen som stöd när du är aktiv i verksamheten.

Mattecentrum Online

Mattecentrum Online är en räknestuga på webben och vänder sig till alla som vill lära sig mer om matematik upp till gymnasienivå. Verktyget tillgängliggör räknestugekonceptet bortom geografiska gränser. De som besöker sajten har sitt egna material och frågor som de ställer till volontärer som är online.

Finansiering

Mattecentrum är en insamlingsorganisation. Vi är berättigade ett 90-konto vilket innebär att vi står under Svensk insamlingskontrolls granskning och att minst 75 procent av våra medel måste gå direkt till ändamålet.

Stiftelser och fonder ger oss medel till olika typer av projekt och ibland även till ordinarie verksamhet. Vi har också sponsorer, ofta ingenjörsintensiva företag, som genom oss investerar i sin framtida kompetensförsörjning samtidigt som de tar ett socialt ansvar.

Myndigheter såsom Myndigheten för ungdoms- och civilsamhällesfrågor och Skolverket ger årligen anslag till verksamheten. Hur stort stöd som Mattecentrum får från Myndigheten för ungdoms- och civilsamhällesfrågor varje år beror på antalet medlemmar i föreningen. Det är därför bra om så många elever som möjligt som tar del av hjälpen också blir medlemmar, så att Mattecentrum kan erbjuda Sveriges elever ännu mer hjälp i framtiden.

Som volontär får du gärna berätta för eleverna du möter om möjligheten att bli medlem i Mattecentrum. Medlemskapet är gratis och innebär inga åtaganden från elevens sida. Som medlem i Mattecentrum har man rösträtt i årsmötena för respektive lokalförening samt för riksorganisationen. På **Mattecentrum.se** finns ett formulär att fylla i för att teckna medlemskap. Medlemskapet gäller kalenderåret ut.

Volontärens roll och uppdrag

Du som volontär är en av Mattecentrums viktigaste tillgångar. Den huvudsakliga rollen som volontär är på plats i en räknestuga.

Det finns möjlighet att engagera sig på annat sätt, till exempel genom att informera elever om verksamheten, medlemsvärva, ha förtroendeuppdrag i lokalföreningen eller sköta administrativa uppgifter. Låter det intressant är du hjärtligt välkommen att kontakta din projektledare/samordnare för mer information.

Kunskapskrav

Som volontär förväntas du kunna hjälpa till med all högstadie- och gymnasiematematik. I vissa fall är det möjligt att göra undantag från detta om det finns andra volontärer på plats som kan täcka upp.

I slutet av denna handbok finner du en snabbkurs i matematik 5, vilket är den sista matematikkursen som ges på gymnasiet. Känner du dig osäker på om du har koll på kursinnehållet, ta en titt där! För att fräscha upp minnet i skolans övriga matematikkurser, klicka in på **Matteboken.se**.

Tid

Räknestugorna följer skolterminen och pågår ända till dess att det sista nationella provet är skrivet. Vanligtvis är en räknestuga två timmar lång och pågår en vardag efter skoltid. Under skollov och röda dagar håller räknestugorna normalt sett stängt, men lokala avvikelser kan förekomma.

Vi ser helst att du som volontär vill vara med på en räknestuga varje vecka men på vissa orter finns det möjlighet till ett flexiblare schema. Ibland går det även bra att endast vara reserv.

Vid förhinder

Alla har ett livspussel att lägga och ibland kommer du inte hinna till räknestugan. Det är såklart okej. Det enda Mattecentrum begär är att du i så god tid som möjligt hör av dig till din projektledare/samordnare, om du vet att du inte kan hjälpa till en viss dag. Då hinner projektledaren/samordnaren få tag på en reserv eller flytta runt volontärer så att alla räknestugor är tillräckligt bemannade.

Försäkring

Som volontär är du försäkrad när du är ute i verksamheten. Alla volontärer har en olycksfallsförsäkring via Folksam som gäller när du som volontär vistas i verksamhetens lokaler och på vägen till och från räknestugan.

Inför volontärintervjun

Inför volontärintervjun ska du fylla i och skicka in blanketten Begäran om utdrag från belastningsregistret till Polisen, ett krav som vi har då vi arbetar med barn och ungdomar. Det registerutdrag som du får hem i brevlådan tar du med dig till intervjun och visar för projektledaren/samordnaren. Blanketten finner du på sidan 8.

Under volontärintervjun kommer du också att underteckna dokumentet Regler och förhållningssätt - volontärhos Mattecentrum. Dokumentet innehåller de regler som gäller ute i verksamheten. Detta gör vi för att säkerställa att du är insatt i vad som krävs av dig i uppdraget som volontär. Dokumentet finner du på sidan 7.

Ute i verksamheten

För Mattecentrum är det lika viktigt att elevernas intresse för matematiken väcks som att deras kunskap ökar. Positiv energi smittar, så passa på att vara glad i mötet med eleverna. Ha kul!

Generella tips

Till Mattecentrum kommer alla sorters elever: de som kämpar för ett godkänt betyg, de som behöver mer utmaningar än vad skolan kan erbjuda och alla däremellan. Som volontär ska du försöka ge den stora bilden och få eleven att förstå, bli en bättre problemlösare och växa som individ. Du ska däremot inte göra elevens matteläxor.

Det förekommer inga organiserade genomgångar utan all hjälp är på individuell basis, anpassad till de uppgifter och den nivå som varje enskild elev befinner sig på. Försök att få eleven att klara uppgiften själv genom vägledning, först då växer eleven! Ett bra sätt att försäkra dig om att du inte råkar "ta över" uppgiften från eleven är att alltid låta eleven hålla i pennan och själv rita och skriva, samtidigt som ni för en dialog kring uppgiften.

I och med att eleverna som vi hjälper är så pass olika kan de behöva olika djupa förklaringar, så försök att anpassa nivån efter eleven. En bra första fråga att ställa kan vara "Hur långt har du kommit själv?" eller "Hur har du löst tidigare uppgifter?". Ofta kan eleven lösa uppgiften bara genom att tvingas förklara den högt.

Precis som eleverna är ni volontärer individer med olika bakgrunder och erfarenheter och hjälper därför till på era egna sätt. Detta är en styrka eftersom det ger eleven möjlighet att få samma problem förklarat för sig på olika vis vid samma tillfälle.

Försök att alltid vara tålmodig och peppande. Vissa elever kan bli frustrerade och vilja ge upp om det är något tal som de inte klarar av. Tänk på att de faktiskt har haft tillräcklig motivation för att ta sig till räknestugan. Försök att hitta den motivationen hos dem igen och uppmuntra dem att inte ge upp. Att någon har tålamod och tror på en trots att det tar tid att förstå stärker matte-självförtroendet!

Undvik att lägga någon värdering i dina förklaringar när eleven kör fast. Inte sällan missuppfattas skämt och eleven känner sig dumförklarad även om det inte var meningen.

Rita! Det finns nästan ingenting som fungerar så bra för så många som en bra figur. Att rita upp matematiska problem ger eleven möjlighet till visuell förståelse, samtidigt som det ger dig som volontär stöd i din förklaring.

Är du i en räknestuga, var då inte rädd för att ta hjälp av andra volontärer om du kör fast själv. Det blir effektivare om man hjälps åt och fler elever blir hjälpta, vilket är det viktigaste. Ta gärna hjälp av **Matteboken.se** i räknestugan.

Under en del prov får eleverna inte använda sig av miniräknare eller grafritande räknare. Uppmana därför eleverna till att ställa upp uträkningarna eller använda huvudräkning så långt som möjligt. Många elever tar av lättja hjälp av miniräknare även till de enklaste av operationer och behöver den extra övningen i att räkna utan hjälpmedel.

Våga ta saker steg för steg. För hela tiden en dialog med eleven så att du är säker på att det du säger går in. Det är ingen vits med en lång förklaring i vilken eleven tappar bort sig i början. Det kan istället få motsatt effekt och sänka elevens matte-självförtroende. Om du är osäker på om eleven har förstått din förklaring på slutet, be då gärna eleven att förklara problemet och lösningen för dig med sina egna ord. Då vet du säkert om eleven har hängt med i resonemanget och eleven får då även träna på sitt matematiska språk.

Se elevernas matteböcker som en resurs. Blir du osäker på en formel eller regel står den oftast i en faktaruta någonstans nära uppgiften. Om du är bekväm med elevernas kursmaterial minskar också risken att du slänger dig med matematiska begrepp som eleverna ännu inte har hunnit lära sig. Sitter du på Mattecentrum Online kan du alltid använda dig av **Matteboken.se**.

Tänk på hur du står i förhållande till eleven i räknestugan. Sätt dig gärna på en stol bredvid eleven, alternativt på huk, så att ni kommer på samma höjdnivå. Detta istället för att hänga över elevens axel, något som många kan tycka känns obekvämt. När en elev och volontär är på samma höjdnivå blir det ofta lättare att i lugn och ro föra en dialog kring den matematikuppgift som eleven vill ha hjälp med. Står du upp kan det av vissa uppfattas som om du redan är på väg bort i tanken snarare än du är redo att tålmodigt förklara.

Länkar

Här kommer några länkar som är mer eller mindre nyttiga.

Mattecentrum.se

Här hittar du bland annat alla mattecentrums räknestugor i hela Sverige.

Mattecentrum.se

Matteboken.se

Glöm inte tipsa om Matteboken.se i räknestugan.

Matteboken.se

Pluggakuten.se

Här hittar du Sveriges största läxhjälpsforum, där elever från hela landet kan ställa frågor om matematik och andra skolämnen.

Pluggakuten.se

Formelsamlingen.se

Här hittar du formler inom matematik, kemi och fysik. Mattecentrums formelsamling finns både på webben och som app.

Formelsamlingen.se

Kursplaner

För den nyfikne finns även kursplanerna till alla gymnasiekurser i matematik här:

bit.ly/1voy8Gr

Registerutdrag

Här hittar du blanketten för att få ett utdrag från polisens belastningsregister.

bit.ly/1FrP3wD

Regler och förhållningssätt – volontär i Mattecentrum

Mötet mellan eleven och volontären är avslappnat och informellt, men som volontär får du inte glömma din roll som förebild. Elever, lärare, rektorer och volontärkollegor förväntar sig att du ska bete dig föredömligt, ansvarsfullt och vara på plats om du inte har meddelat projektledaren/samordnaren annat. Reglerna finns för att alla ska känna sig trygga och för att hålla hög kvalité i räknestugorna.

Som volontär förbinder jag mig till att:

- Aldrig flirta med en elev eller på annat sätt uppträda olämpligt.
- Aldrig ta emot pengar eller gåvor från elev eller förälder.
- Aldrig ge ut mitt eget, be om eller ta emot en elevs telefonnummer – elever som önskar mer hjälp hänvisas istället till andra räknestugor, **Matteboken.se** och **Pluggakuten.se**.
- Aldrig konsumera tobak, alkohol eller droger i samband med Mattecentrums räknestugor (snus är ok om det används diskret).
- Vid något misstänkt/olämpligt i samband med Mattecentrums räknestugor, meddela din projektledare/samordnare så att åtgärder kan vidtas.
- Behandla alla elever likvärdigt, oavsett kön, bakgrund, kunskapsnivå eller ålder.

Vid misstanke om att räkneuppgiften är betygsgrundande får du som volontär inte hjälpa eleven med en lösning till denna uppgift – var noggrann med att ge generella lösningar i stället för ledande förklaringar. Har du möjlighet att hitta uppgifter med liknande moment går detta naturligtvis bra.

Tänk även på att eleven ska känna sig trygg i att ställa vilka frågor som helst som rör matematik – låt därför sådan information stanna i räknestugan.

Jag har läst igenom ovanstående regler och intygar härmed att jag kommer att följa dem i alla sammanhang då jag är volontär för eller representerar Mattecentrum.

....

NAMNTECKNING

....

NAMNFÖRTYDLIGANDE

....

ORT OCH DATUM

Polisen

BEGÄRAN OM UTDRAG
från belastningsregistret för
föreningar m.m.

Insändes till:
Polismyndigheten
Box 757
981 27 Kiruna

Den här blanketten är avsedd för dig som ombetts visa upp ett utdrag ur belastningsregistret enligt bestämmelser i lagen (2013:852) om registerkontroll av personer som ska arbeta med barn.

Du ska visa upp utdraget när du erbjuds anställning, uppdrag eller praktiktjänstgöring om det är ett arbete som innebär direkt och regelbunden kontakt med barn. Du får sedan behålla utdraget som är giltligt under 1 år från utfärdandedatumet.

Normal handläggningstid är ca 2 veckor, men om blanketten är ofullständigt eller otydligt ifyllt kan det ta längre tid. Var god **texta** om du inte fyller i blanketten direkt i datorn. **Glöm inte namnunderskriften** (gäller även inskannad begäran via e-post).

Dina personuppgifter

Personnummer (ÅÅÅÅMMDD-XXXX) Efternamn

–

Förnamn Telefonnummer dagtid

Jag vill ha utdraget skickat till följande adress:
(observera att utdrag inte får skickas direkt till arbetsgivare)

Postnummer Postort

Ovanstående adress är **inte** min folkbokföringsadress ☐

Sökandens underskrift (obligatoriskt)

(Datum)

(Ort)

Formuläret ska sändas till Polismyndigheten. Vi godtar även din begäran inskannad och skickad som e-post.

De uppgifter du lämnar kommer att behandlas automatiserat enligt personuppgiftslagen (1998:204)

Observera att din begäran behandlas automatiskt och därför besvaras inga frågor via e-post RUT44214

En snabbkurs i Matte 5

Av Marcus Näslund

INNEHÅLL

INLEDNING: VAD ÄR DISKRET MATEMATIK?

Detta häfte är avsett för Mattecentrums volontärer som läst de tidigare gymnasiekurserna (A-E) men inte kursen Matematik Diskret eller någon kurser i algebra, talteori, grafteori och kombinatorik på högskolenivå. Texten är avedd som en händig inledning till dessa koncept med tips till vidare läsning, men kan självklart inte ses som ekvivalent med en ordentlig utbildning i dessa ämnen.

Texten är skriven i början av sommaren 2013, innan några kursböcker i Matematik 5 kommit ut. Därför är den enda basen till innehållet de kursmål som publicerats från Skolverket. Matematik 5 innehåller även delmoment inom differentialekvationer, men då dessa tidigare var del av E-kursen täcks de inte här.

Det skrattas nog mer åt diskret matematik än andra matematiska grenar eftersom det så lätt kan kallas ”hemlig” eller ”tystlåten” matematik. I engelskan finns det två olika ord: ***discreet*** och ***discrete***. Det är det första ordet som de flesta tänker på, men i själva verket heter området på engelska ***discrete mathematics***, den andra betydelsen. Wiktionary (http://en.wiktionary.org/wiki/discrete) listar följande definition:

Separate; distinct; individual; Non-continuous.

På ett sätt kan vi uttrycka skillnaden som: ***De saker som kan räknas är diskreta och de som måste mätas är kontinuerliga***. Kurserna matematik 1-4 handlar mycket om kontinuerliga ting: reella tal, funktioner, derivator och så vidare.

Här kommer vi istället träffa på uppräkneliga antal såsom korten i en kortlek, se hur de kan blandas eller kombineras i olika mönster, vilken som är bästa vägen mellan två städer, och så vidare. Problem i diskret matematik är ofta lätta att förstå men kan ändå vara mycket svåra att lösa. I och med att datorn räknar i diskreta steg och användandet av datorer har exploderat under de senaste åren har behovet av diskret matematik ökat i minst lika hög takt.

Varje avsnitt inleds med det kursmål som behandlas och innehåller stundtals tips på vidare läsning. Lycka till!

MÄNGDER

Begreppet mängd, operationer på mängder, mängdlärans notationer och venndiagram.

Mängdteori (eller ”mängdlära”) är den fundamentala byggstenen i matematik idag och tillhör därför det mest grundläggande som matematiken har att erbjuda.

DEFINITIONER

En ***mängd*** är en samling objekt precis som hur ett fotbollslag är en mängd av fotbollsspelare, och björken är ett objekt i mängden av alla trädsorter. Ett objekt i en mängd kallas oftast för ett ***element***.

Mängderna kallar vi oftast för någon stor bokstav (A, B eller ofta S). Vi definierar innehållet i en mängd på tre olika sätt:

1. I text:
   A är mängden av alla positiva heltal.

2. Som en uppräkning:
   $A = \{1, 2, 3, \dots\}$

3. Med mängdbyggaren:
   $A = \{x \mid x \geq 1 \; och \; x$ är $heltal\}$
   Detta utläses: ”A är mängden av alla x där x är större än eller lika med ett och x är ett heltal”.

Mängdbyggaren skrivs ibland med kolon eller semikolon istället för ett vertikalt streck.

A är en ***delmängd*** av B om alla element i A också finns i B. Vi skriver $A \subseteq B$. En äkta delmängd har också villkoret att $A \neq B$, det vill säga att det finns fler element i B än i A. Detta skrivs som $A \subset B$.

Om ett element x ingår i mängden A skriver vi $x \in A$.

Viktiga mängder i matematiken, som därför fått speciella symboler, är:

- $\mathbb{N} = \{0,1,2,3, \dots\} = de \; naturliga \; talen$
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1,0,1,2,3, \dots\} = alla \; heltal$
- $\mathbb{Q} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{7}{9}, 12, \dots\right\} = alla \; bråktal \; (rationella \; tal)$
- $\mathbb{R} = \left\{\frac{1}{3}, \pi, 7, \dots\right\} = alla \; reella \; tal$
- $\mathbb{C} = \left\{2, 7 + 3i, \frac{4}{6} + 3{,}6i, \dots\right\} = alla \; komplexa \; tal$
  Vi kan även skriva:
- $\emptyset = \{ \quad \} = den \; tomma \; mängden$

Vi kan också skriva mängderna av rationella tal och komplexa tal som:

$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z} \; och \; b \neq 0\right\}$ = ”alla bråk a/b där a och b är heltal och b inte är lika med noll.”
$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ = ”alla tal a+bi där a och b är reella tal.”

Vårt första exempel på mängd ovan kan vi alltså också skriva som

$$A = \{x \mid x \geq 1 \; och \; x \in \mathbb{Z}\}$$

Den tomma mängden är delmängd till alla tänkbara mängder. För de andra mängderna gäller:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Vi kan se det som att alla naturliga tal är heltal, alla heltal är rationella tal, alla rationella tal är reella tal och att alla reella tal också är komplexa tal. De är alla äkta delmängder eftersom varje större mängd innehåller något som inte finns i den mindre mängden.

Antalet element i en mängd A skrivs $|A|$ och kallas ***kardinaliteten*** av A eller ***ordningen*** av A.

Exempel: Om $A = mängden\ av\ Sveriges\ innevånare$ så är $|A| \approx 9\,000\,000$.

Precis som de fyra räknesätten för tal (addition, subtraktion, multiplikation, division) finns det fyra operatorer för mängder: snitt, union, differens och komplement. Tänk dig två mängder A och B:

- ***Snitt*** skrivs med symbolen ∩ och resultatet är en ny mängd som innehåller allt som återfinns i både A och B.
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \; och \; x \in B\}$$

- ***Union*** skrivs med symbolen ∪ och resultatet är en ny mängd som innehåller allt som återfinns antingen i A eller B eller båda.
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \; eller \; x \in B\}$$

- ***Differens*** skrivs med symbolen \ och resultatet är en ny mängd som innehåller allt som återfinns i den första mängden men inte i den andra.
$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \; och \; x \notin B\}$$
Minustecken (−) används ibland istället för \ för att beteckna differens.

- Ett ***komplement*** till en mängd A är en ny mängd som innehåller allt som inte finns i A.
$$A^C = \{x \mid x \notin A\}$$
Nu är det förstås viktigt att förstå vad som menas med ”inte finns”.

En mängd kan alltid sägas ligga i en större ***grundmängd*** eller ”universum”. När vi talar om mängden av alla människor i Sverige så är komplementet förmodligen alla människor som inte bor i Sverige. Tänk att mängden av alla människor i Sverige ligger i den större grundmängden ”alla människor”. Det är sant att både talet 83 och ”blåbärssmak” inte ligger i mängden av alla människor i Sverige, men dem är vi (förmodligen) inte intresserade av under uträkningen.

Grundmängden är oftast underförstådd från sammanhanget, eller uttryckligen angiven.

VENNDIAGRAM

Mängder illustreras med ***Venndiagram***.

$$S = \{x | 1 \leq x \leq 9, x \in \mathbb{N}\}$$

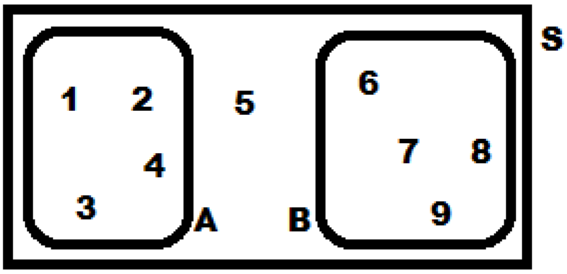
$$A = \{x | x < 5, x \in S\}$$

$$B = \{x | x > 5\ x \in S\}$$

Dessa mängder läser du ut såhär:

S är mängden av alla x mellan 1 och 9 som är naturliga tal. A är mängden av alla x som är mindre än 5 och som finns i S. Alltså: A består av alla element (tal) i S som är mindre än 5. På samma sätt innehåller B alla element i S som är större än 5.

Mängderna illustreras med följande Venndiagram.



Observera att eftersom alla element i A också finns i S betyder det att $A \subset S$. På samma sätt gäller att $B \subset S$.

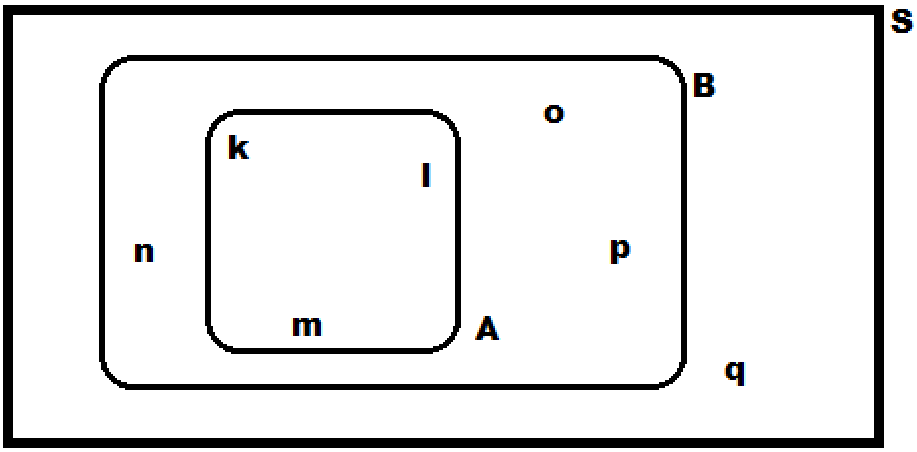
Komplementet till A, allt som inte ligger i A, är:

$$A^C = \{5\} \cup B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$$

Med "allt"menas i detta fall allt som finns i grundmängden S, inte "alla heltal".

Se till att du förstår innehållet i varje mängd både utifrån definitionerna och diagrammet innan du går vidare.

Vi tar ett till exempel:



Ur detta Venndiagram kan vi utläsa följande mängder:

$$S = A \cup B \cup \{q\}$$

(S består av allt som finns i A, allt som finns i B, samt elementet q.)

$$B = \{k, l, m, n, o, p\}$$

$$A = \{k, l, m\}$$

Vi ser också att A är en (äkta) delmängd till B, det vill säga $A \subset B$.

Eftersom A är en äkta delmängd till B, $A \subset B$, kan vi också skriva mängden S som:

$$S = B \cup \{q\}$$

Allt som finns i S finns antingen i B, eller så är det elementet q.

PROBLEM INOM MÄNGDTEORIN

Mängder får inte definieras hur som helst, då kan man nå resultat i stil med ***Russells paradox***:

$$S = \{X \mid X \nsubseteq X\}$$

Mängden S består av alla mängder som inte tillhör sig själva. Vad är problemet med detta?

Varje mängd X tillhör någon av de två kategorierna

1. Mängden tillhör sig själv: $X = \{\dots, X, \dots\}$
2. Mängden tillhör inte sig själv: $X = \{\dots\}$

Vad gäller för mängden S? Anta att den tillhör kategori 1. Det betyder att $S \subseteq S$. Men S består precis av alla mängder som *inte* tillhör sig själva: $S \nsubseteq S$. Detta är en logisk motsägelse och förbjuden.

Men att anta att S tillhör kategori 2 leder till samma sorts motsägelse: att S både tillhör sig själv och *inte* tillhör sig själv. Så kan vi inte ha det! S är alltså ingen mängd. Problemet är även känt som ***barberarparadoxen***: I en stad bor en barberare som klipper håret på alla som inte klipper håret på sig själva. Vem klipper då håret på barberaren?

Ett annat, kanske det enklaste, exemplet på en paradox är meningen: ”Denna mening är falsk”. Om du accepterar att meningen är falsk, då är den ju sann. Men om du accepterar att det som står där är sant, ja då är det falskt.

Kontentan är att kraven på vad som är en mängd (och kan behandlas som sådan, med mängdoperationerna union, snitt, differens och komplement) är väldigt rigoröst uttryckta inom matematiken. Såhär pass avancerade konstruktioner ska vi dock inte syssla med, men det är bra att ha i åtanke. En definition av en samling objekt är inte nödvändigtvis en mängd. Allt är inte guld som glimmar.

DELMÄNGDER OCH OÄNDLIGHETER

Kom ihåg att A är en ***delmängd*** till B om alla element i A också existerar i B.

Från en given mängd A med kardinalitet n, det vill säga $|A| = n$, kan vi alltid skapa totalt 2^n stycken delmängder. Detta kommer bevisas i nästa kapitel om kombinatorik, för tillfället accepterar vi detta som en sanning. Betänk mängden $A = \{a, b, c\}$ som alltså har kardinalitet 3. Vi bör kunna hitta $2^3 = 8$ delmängder:

$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$
$\{a, b\}$	$\{a, c\}$	$\{b, c\}$	$\{a, b, c\}$

Mängden av alla delmängder till en given mängd kallas ***potensmängden*** (på engelska *power set*) och skrivs med funktionen $\mathcal{P}$.

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

Kardinaliteten (antal element) i potensmängden är alltid större än den ursprungliga mängden. Detta kan tyckas vara uppenbart eftersom $2^n > n$ men detta har visat sig stämma även för oändligt stora mängder!

Så... vad innebär det?

Oändligt större än oändligheten (Lite överkurs men ack så intressant)

En ***oändlig mängd*** är en mängd med oändligt många element. $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ och $\mathbb{R}$ är exempel på sådana (det finns oändligt många naturliga tal, heltal och reella tal). Däremot finns det, till stor förvårning, olika stora oändliga mängder.

Att två mängder är lika stora (har samma kardinalitet) innebär att varje element i den ena mängden kan paras ihop unikt med ett element i den andra mängden. Vi behöver inte räkna antalet fingrar för att se att vi har lika många fingrar på vänsterhanden som på högerhanden. På samma sätt kan en oändlig mängd sägas vara lika stor som de naturliga talen om de kan placeras på en numrerad lista, ett element för varje naturligt tal.

De naturliga talen $\mathbb{N}$ utgör den ”minsta oändligheten” och dess kardinalitet förkortas $\aleph_0$ (läses ”alef noll”). Men eftersom potensmängden alltid är större kan vi hitta en oändlig mängd som är ännu större (nästa är av storlek $\aleph_1$, nästa är $\aleph_2$ och så vidare). Det har visat sig att det finns fler reella tal än naturliga tal, med andra ord $|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$. Vi ska inte bevisa detta men tänk på följande: Att mängderna inte är lika stora betyder att decimaltalen inte kan ordnas upp på en lista. Om du börjar med att para ihop 0 med 0, vilket är nästa decimaltal efter 0 som ska paras ihop med 1? Även om du väljer ett mycket litet tal 0,000000000000001 så kan du hitta ett ännu mindre (som ändå är större än 0). Oavsett vilka tal du än sätter upp i listan går det att hitta ett som du missat.

Den exakta storleken på $\mathbb{R}$ är däremot okänd. Det känns naturligt för många matematiker att $|\mathbb{R}| = \aleph_1$, vilket kallas ***kontinuumhypotesen***. Men detta är ett ännu olöst problem.

De oändliga storlekarna fortsätter $\aleph_2, \aleph_3, \aleph_4, \aleph_5, \ldots$ och så vidare. Inte ens dessa tar slut.

- $\aleph_{\aleph_0}$ är den största mängden i den minsta oändliga listan av oändliga mängder.
- $\aleph_{\aleph_{\aleph_0}}$ är den största mängden i den minsta oändliga listan med storleken av den största mängden i den minsta oändliga listan av oändliga mängder.

Det är helt okej att få huvudvärk av de två sista formuleringarna. Men idéerna är mycket spännande och jag rekommenderar att du utforskar dessa oändlighetskoncept vidare med följande mycket pedagogiska video:

http://www.youtube.com/watch?v=elvOZm0d4H0

Nu återgår vi till ändliga tal och mer intuitiva problem.

KOMBINATORIK

Begreppen permutation och kombination.

Metoder för beräkning av antalet kombinationer och permutationer samt motivering av metodernas giltighet.

Vi vill kunna besvara frågor av typen:

Bland 25 elever ska ett fotbollslag med 11 spelare väljas ut. På hur många olika sätt kan detta göras?

Hur många sätt kan ett värde väljas för ett kombinationslås?

PERMUTATIONER OCH KOMBINATIONER

Ovanstående frågor är exempel på frågeställningar inom området kombinatorik. Området handlar om att antingen en ordnad delmängd (permutation) eller en delmängd utan att bry sig om inbördes ordning (kombination) ur en mängd med alternativ.

För att underlätta beräkningar används skrivsättet $n!$ vilket utläses ”n fakultet” och betyder:

$$n! = n * (n-1) * (n-2) * \ldots * 3 * 2 * 1$$

Till exempel så är $4! = 4 * 3 * 2 * 1 = 24$. Vi definierar $0! = 1$.

Antal sätt att välja en ***permutation*** med k element från n element skrivs $P(n,k)$ och beräknas:

$$P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Vi tar ett exempel: I en skolklass med 20 elever ska en elevrådsrepresentant och sekreterare väljas. Dessa får inte vara samma person. På hur många olika sätt kan detta göras?

$$P(20,2) = \frac{20!}{(20-2)!} = \frac{20!}{18!} = \frac{20 * 19 * \cancel{18 * 17 * \ldots * 1}}{\cancel{18 * 17 * \ldots * 1}} = 20 * 19 = 380$$

Vi kan också motivera detta med multiplikationsprincipen: Till den första posten finns 20 möjligheter. När denna är vald finns 19 till den andra posten. Totalt $20 * 19 = 380$ möjligheter.

Om vi däremot vill välja ut en grupp med 2 elever utan att bry oss om inbördes ordning (i detta fall vem som får vilken post) beräknar vi antalet ***kombinationer*** med k element från n. Antalet skrivs $C(n,k)$ eller vanligtvis $\binom{n}{k}$, Observera att det inte finns något bråkstreck.

$$C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \frac{P(n,k)}{k!}$$

Vi delar alltså antalet permutationer med $k!$, i detta fall $2! = 2$, för att få bort de permutationer som räknas två gånger (Per=ordförande och Sara=sekretare är samma kombination som Per=sekreterare och Sara=ordförande). Talet $\binom{n}{k}$ kallas också för ***binomialkoefficient*** och läses ”n över k”.

Exempel: På avbytarbänken till ett fotbollslag sitter fem personer. Bara tre får spela. På hur många olika sätt kan avbytarna väljas?

Av fem personer ska tre väljas, detta kan göras på

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{(5-3)!\,3!} = \frac{5*4*3*2*1}{2*1*3*2*1} = \frac{5*4}{2*1} = 10$$

olika sätt.

Ett kombinationslås borde alltså egentligen heta *permutationslås*. Det räcker ju inte med att bara veta vilka siffror som ingår, utan också i vilken ordning (permutation) de förekommer.

NÅGRA VIKTIGA EGENSKAPER

Talen $\binom{n}{k}$ blir snabbt mycket stora och svåra att beräkna, men det finns många samband och förenklingar som kan användas.

Att välja n element från en mängd med n element kan bara göras på ett sätt (välj alla):

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{(n-n)!\,n!} = \frac{1}{0!} = \frac{1}{1} = 1$$

Att välja 0 element från en mängd med n element kan bara göras på ett sätt (välj inget):

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{(n-0)!\,0!} = \frac{n!}{n!\,0!} = \frac{1}{1*1} = 1$$

Det spelar ingen roll om vi väljer k element eller $n-k$ element:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$$

Med andra ord är till exempel $\binom{5}{3} = \binom{5}{2}$. Att skaka hand med tre personer från en grupp av fem kan göras på lika många sätt som vi kan välja två personer att ***inte*** skaka hand med. Att välja tre av fem är ekvivalent med att inte välja två av fem.

PASCALS TRIANGEL

Detta triangelformade mönster av tal kallas för Pascals triangel och är uppkallad efter den franske matematikern Blaise Pascal. Varje element är summan av de två ovanstående.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

Summan av rad n är 2^n. Vad har triangeln med kombinatorik att göra? Jo, det visar sig att varje tal är en ***binomialkoefficient***!

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

Vi kan därför motivera följande formel:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Till exempel:

$$\binom{4}{2} = \binom{3}{1} + \binom{3}{2}$$

BINOMIALSATSEN

Med kvadreringsregeln vet vi att

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

vilket är detsamma som:

$$(a+b)^2 = \binom{2}{0}a^2 + \binom{2}{1}ab + \binom{2}{2}b^2$$

På samma sätt gäller

$$(a+b)^3 = \binom{3}{0}a^3 + \binom{3}{1}a^2b + \binom{3}{2}ab^2 + \binom{3}{3}b^3$$

vilket inte är ett sammanträffande.

Tänk på att $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b)$

I ovanstående exempel kan vi välja ut en mängd med 3 stycken a genom att välja a från varje parentesuttryck. Det kan bara göras på ett enda sätt. Två a och b kan väljas på 3 sätt (där b väljes från 1 av 3 uttryck, och sedan väljes a från de andra två). Och så vidare.

Allmänt gäller den ***allmänna binomialsatsen***:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \cdots + \binom{n}{n-1}a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0 b^n$$

Formeln fungerar även för uttryck som $(a-b)^n$ genom att byta ut varje b^k mot $(-b)^k$ i varje term ovan.

$$(a-b)^n = \binom{n}{0}a^n(-b)^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}(-b)^1 + \cdots + \binom{n}{n-1}a^1(-b)^{n-1} + \binom{n}{n}a^0(-b)^n$$

Binomialsatsen är mycket fördelaktig att lära sig utantill. Mönstret i sig är viktigt att förstå och precis som kvadreringsregeln mycket användbar för att förenkla uttryck av typen $(a+b)^n$.

POTENSMÄNGDEN

I förra kapitlet sade jag att vi skulle motivera att en mängd av ordning n har precis 2^n delmängder. Detta kan vi nu äntligen göra med hjälp av binomialsatsen. Observera att vi en delmängd av ordning k är en kombination med k element tagna ur vår ursprungsmängd. En delmängd med 0 element kan därför väljas på precis $\binom{n}{0}$ sätt. En delmängd med 1 element kan väljas på precis $\binom{n}{1}$ sätt, och så vidare. Antalet delmängder är totalt alltså

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}$$

Vi kan med hjälp av binomialsatsen säga något om hur stor denna summa är! Låt $a=1$ och $b=1$ och beräkna med binomialsatsen uttrycket $(1+1)^n$.

$$(1+1)^n=\binom{n}{0}1^n1^0+\binom{n}{1}1^{n-1}1^1+\cdots+\binom{n}{n-1}1^11^{n-1}+\binom{n}{n}1^01^n$$

Vänsterledet kan vi förenkla till 2^n och högerledet kan förenklas eftersom 1 upphöjt i vad som helst fortfarande är 1.

$$2^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}$$

Högerledet är nu precis det uttryck vi hade för antalet delmängder och vänsterledet är 2^n. Vi har alltså bevisat att potensmängden är av ordning 2^n för en mängd av ordning n. Samtidigt har vi knutit an två olika grenar av matematiken, kombinatoriken och mängdläran. Häftigt!

Exempel: Beräkna koefficienten framför $\mathrm{a}^3\mathrm{b}^2$ i uttrycket $(\mathrm{a}+\mathrm{b})^5$.

Detta är en vanlig uppgift. Till detta använder vi binomialsatsen.

$$(a+b)^5=\binom{5}{0}a^5b^0+\binom{5}{1}a^4b^1+\binom{5}{2}a^3b^2+\binom{5}{3}a^2b^3+\binom{5}{4}a^1b^4+\binom{5}{5}a^0b^5$$

Som vi ser är den efterfrågade koefficienten:

$$\binom{5}{2}=\frac{5!}{(5-2)!\,2!}=10$$

Exempel: Hur många delmängder av kardinalitet 2 finns det till en mängd av storlek 5?

Detta är i själva verket precis samma uppgift. Att välja 2 element från totalt 5 kan göras på följande antal sätt:

$$\binom{5}{2}=\frac{5!}{(5-2)!\,2!}=10$$

KONGRUENSRÄKNING

Begreppet kongruens hos hela tal och kongruensräkning.

Kongruensräkning brukar också kallas för klock-aritmetik eftersom samma principer används för att räkna ut hur mycket klockan är.

TILLBAKA TILL GRUNDSKOLAN: HUR FUNGERAR KLOCKAN?

I en vanlig analog klocka går visaren upp till 12 innan den börjar om. Klockan 13.00 säger vi ”klockan ett” och klockan 14.00 säger vi ”klockan två”. Uppenbarligen gäller det att $13 = 1$ och $14 = 2$.

På det matematiska språket säger vi att vi räknar ***modulo*** 12 och att 13 är ***kongruent*** med 1. Med det menas att att vi associerar talet 12 med talet 0. $12 = 0$. Från det kan vi räkna ut vad 13 är, eftersom $13 = 12 + 1$.

$$13 = 12 + 1 \equiv 0 + 1 = 1$$

Observera tecknet $\equiv$ som vi använder för kongruenser. För att tydliggöra att det är just modulo 12 kan vi skriva:

$$13 \equiv 1\ (mod\ 12)$$

Detta läses ”13 är kongruent med 1 modulo 12” eller ”13 är kongruent med 1 mod 12”. På samma sätt, såsom vi ser på klockan, vet vi att:

$$18 \equiv 6\ (mod\ 12)$$

$$23 \equiv 11\ (mod\ 12)$$

$$24 \equiv 0\ (mod\ 12)$$

Det finns ett annat sätt att se på moduloräkning: som resten av en division. När vi räknar modulo 12 så dividerar med 12 och resten, det som inte går jämnt upp, är resultatet.

$$\frac{18}{12} = 1\ rest\ 6$$

12 går i 18 en gång, kvar blir 6. Därför är $18 \equiv 6\ (mod\ 12)$.

Låt oss lösa en ekvation:

$$17 \equiv x\ (mod\ 5)$$

Vad blir 17 delat med 5? 5 går i 17 tre gånger och kvar blir 2. Alltså är $x = 2$.

Alla kongruensekvationer har oändligt många lösningar,

$$1 \equiv 13 \equiv 25 \equiv 37 \equiv 49\ (mod\ 12)$$

men oftast vill vi gärna hitta värde för $x\ (mod\ m)$ så att $0 \leq x < m$. Detta kan liknas med att vi i uppgifter som

$$\sin(x) = 0{,}5$$

också har oändligt många lösningar. Oftast är vi intresserade av lösningar $0 \leq x \leq 2\pi$ och sedan grupperas alla lösningar som hör ihop in, som till exempel $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ för alla n.

För kongruensräkning modulo n så kan vi alltid kategorisera talen i n olika mängder, så kallade ***ekvivalensklasser***. 0, 12 och 24 är i samma ekvivalensklass modulo 12 eftersom de alla är kongruenta med varandra. 1, 13 och 25 är i samma ekvivalensklass av samma anledning. Vi säger att 0 är en ***representant*** för sin ekvivalensklass, precis som 1 är för sin. Varje ekvivalensklass är en delmängd till ℕ.

RÄKNEREGLER

Följande räkneregler gäller för kongruenser:

$$a + b\ (mod\ m) \equiv (a\ mod\ m) + (b\ mod\ m)$$

$$a * b\ (mod\ m) \equiv (a\ mod\ m) * (b\ mod\ m)$$

$$a^n (mod\ m) \equiv (a\ mod\ m)^n$$

Viktigt är också att om $a \equiv b\ (mod\ m)$ och $b \equiv c\ (mod\ m)$ så gäller också att $a \equiv c\ (mod\ m)$.

<u>Exempel:</u> Vad blir $29^{100}\ mod\ 4$?

$(29\ mod\ 4)^{100} \equiv (1\ mod\ 4)^{100} = 1^{100} = 1.$

<u>Exempel:</u> Vad blir $30^{100}\ mod\ 4$?

$$(30\ mod\ 4)^{100} \equiv (2\ mod\ 4)^{100} = 2^{100}$$

Hur går man vidare nu? Med hjälp av potensreglerna!

$$2^{100} = (2^2)^{50} = 4^{50} \equiv 0^{50} = 0$$

Att 4≡ 0 följer av att $\frac{4}{4} = 1\ rest\ 0$.

Allt som allt vet vi nu att $30^{100} \equiv 0\ (mod\ 4)$. Eftersom resten är 0 kan vi också säga att 30^{100} är jämnt delbart med 4.

<u>Exempel:</u> Är 33^{12} delbart med 3?

Vi tar reda på detta genom att räkna modulo 3:

$$33^{12}\ mod\ 3 \equiv (33\ mod\ 3)^{12} \equiv (0\ mod\ 3)^{12}$$

Eftersom talet är kongruent med noll så blir det ingen rest vid divisionen, så svaret är Ja.

<u>Exempel:</u> Vilken är sista siffran i talet 33^{12}?

Det finns 10 möjligheter för den sista siffran, så vi räknar modulo 10:

$$33^{12}\ (mod\ 10) \equiv (33\ mod\ 10)^{12} \equiv 3^{12} = (3^4)^3 = 81^3 \equiv 1^3 = 1$$

Den sista siffran i talet är alltså 1. Vi kan också förklara modulo 10 genom att inse att det endast är den sista siffran som är intressant för att räkna ut vad den sista siffran i produkten blir. Vill vi veta de sista två siffrorna räcker det med att bry sig om de två sista siffrorna i varje uträkning. Då räknar vi modulo 100:

$$33^{12}(mod\ 100) = 1089^6(mod\ 100) \equiv 89^6 = 7921^3 \equiv 21^3 = 9261 \equiv 61$$

För att hita de tre sista siffrorna räknar vi modulo 1000, och så vidare.

Kongruensräkning ingår i en mycket stor gren av matematiken känd som ***talteori***, som grovt förklarat handlar om att hitta mönster bland de hela talen. Kongruensräkning med primtal är den stora hörnstenen i kryptering, alltså att skydda meddelanden från obehöriga, till exempel vid onlinehandel och banktransaktioner. Om du är intresserad, sök efter ”RSA-kryptering”.

Här finns det mycket mer spännande att ta upp, men kursmålen verkar bara täcka kongruensräkning. Istället fortsätter vi till något mer bekant: talföljder.

REKURSION OCH TALFÖLJDER

Begreppen rekursion och talföljd.

Vi känner redan till två typer av talföljder, nu ska vi lära oss en tredje version.

REKURSIVA DEFINITIONER

De typer av talföljder vi redan mött är:

- ***Aritmetisk:*** 4, 6, 8, 10, 12, ...
  Något adderas till varje nytt element
- ***Geometrisk:*** 3, 6, 12, 24, 48, ...
  Något multipliceras till varje nytt element

Talen i talföljden kallar vi $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ och så vidare. Tal nummer n är a_n så det första talet är a_0. Vi kan ange dem med en exakt formel:

- Aritmetisk: $a_n = 4 + 2n$
- Geometrisk: $a_n = 3 * 2^n$

Dessa typer av talföljder och deras egenskaper finns att repetera på matteboken.se:

- http://www.matteboken.se/lektioner/matte-1/tal/aritmetiska-talfoljder
- http://www.matteboken.se/lektioner/matte-1/tal/geometriska-talfoljder

Nu ska vi titta på en tredje sorts talföljd: En ***rekursiv talföljd***. Här anges nästa tal som en funktion av de tidigare. Ett välkänt exempel är ***Fibonaccis talföljd***:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$$

Här definieras de två första talen som ettor och sedan är varje tal $a_n$summan av de föregående två talen:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

Så att

$$a_2 = a_1 + a_0 = 1 + 1 = 2$$

$$a_3 = a_2 + a_1 = 2 + 1 = 3$$

och så vidare.

Vi kan skapa en talföljd av talen $n!$ som vi stötte på i kapitlet om permutationer och kombinationer.

$$a_n = n!$$

Ger talföljden

$$1, 1, 2, 6, 24, 120, 720, \dots$$

Vi kan också observera att $n! = n * (n-1)!$ Och beskriva talföljden rekursivt:

$$a_0 = 1$$

$$a_n = n * a_{n-1}$$

I det här fallet kallas $a_n = n!$ en ***direkt formel*** och det senare en ***rekursiv formel***. De formler vi anger för aritmetiska och geometriska talföljder är alltid direkta formler.

Som du säkert minns finns det explicita, generella formler för att beräkna summan av aritmetiska och geometriska talföljder. Rekursiva talföljder är ett mycket mer generellt begrepp och därför finns ingen sådan lätt regel för summan.

ALGORITMER

Med algoritmer menas generella metoder att utföra en uppgift. Att räkna multiplikation med uppställning eller kort division är exempel på algoritmer.

Algoritmer kan också vara rekursiva, så är fallet när de använder sig själva.

När du lärde dig multiplikation fick du nog höra att multiplikation är upprepad addition. $5 * 3 = 5 + 5 + 5$.

Därför kan matematiker definiera multiplikation med positiva heltal på följande sätt:

$$m * n = \begin{cases} m + m * (n-1) & om\, n > 0 \\ 0 & om\, n = 0 \end{cases}$$

Algoritmen är rekursiv eftersom resultatet är en summa som inkluderar en ny multiplikation, ända tills talet n har blivit noll.

Exempelvis:

$$\mathbf{4} * \mathbf{3} = 4 + \mathbf{4} * \mathbf{2} = 4 + 4 + \mathbf{4} * \mathbf{1} = 4 + 4 + 4 + \mathbf{4} * \mathbf{0} = 4 + 4 + 4 + 0 = 12$$

$$\mathbf{5} * \mathbf{2} = 5 + \mathbf{5} * \mathbf{1} = 5 + 5 + \mathbf{5} * \mathbf{0} = 5 + 5 + 0 = 10$$

Alla datorprogram är exempel på algoritmer och är nästan alltid en blandning av många olika algoritmer. Det är intressant att hitta så effektiva algoritmer som möjligt. För att jämföra dem jämför vi hur många beräkningar som krävs för att utföra respektive algoritm (detta kallas för algoritmens ***komplexitet***).

INDUKTIONSBEVIS

Induktionsbevis med konkreta exempel från till exempel talteoriområdet.

Matematik handlar i stor grad om bevis och motbevis. Är ett påstående sant eller falskt? Gäller det alltid?

MATEMATISKA BEVIS

Att visa att en formel alltid gäller kan vara svårt. Man kan inte bara ”testa med alla tal” för det finns ju oändligt många. Vi behöver smartare knep. En vanlig bevisform kallas ***induktionsbevis*** och är mycket kraftfullt. Det utförs i tre steg:

1. Bevisa att formeln gäller för ett visst tal. (Induktionsbas)
2. Anta att formeln gäller för något tal m. (Induktionsantagande)
3. Visa att, med ovanstående antagande, formeln också gäller för m+1.

Då följer det, logiskt, att formeln gäller för alla tal efter induktionsbasen.

Dominobrickor är ett exempel:

1. Vi kan visa tydligt att vi tippar omkull den första brickan.
2. Om vi antar att bricka m faller...
3. ...så faller också nästa bricka $(m+1)$

Alltså faller ***alla*** brickor.

Vi gör detta med ett matematiskt exempel:

<u>Exempel:</u> Visa att, oavsett n, så gäller:

$$\frac{1}{1*2}+\frac{1}{2*3}+\frac{1}{3*4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

Steg 1: För $n=1$ får vi $VL=\frac{1}{1*2}=\frac{1}{2}=HL$, så formeln stämmer för denna induktionsbas.

Steg 2: Anta att formeln gäller för $n=m$:

$$\frac{1}{1*2}+\frac{1}{2*3}+\frac{1}{3*4}+\cdots+\frac{1}{m(m+1)}=\frac{m}{m+1}$$

Steg 3: Nu vill vi visa att den också gäller för $n=m+1$:

$$\frac{1}{1*2}+\frac{1}{2*3}+\frac{1}{3*4}+\cdots+\frac{1}{m(m+1)}+\frac{1}{(m+1)(m+2)}=\frac{m+1}{m+2}$$

Enligt induktionshypotesen är de första termerna i vänsterledet samma sak som $\frac{m}{m+1}$ så vi kan skriva detta uttryck som:

$$\frac{m}{m+1}+\frac{1}{(m+1)(m+2)}=\frac{m+1}{m+2}$$

Nu vill vi visa att likheten stämmer. Vi hittar minsta gemensamma nämnare i vänsterledet:

$$\frac{m(m+2)}{(m+1)(m+2)} + \frac{1}{(m+1)(m+2)} = \frac{m+1}{m+2}$$

$$\frac{m(m+2)+1}{(m+1)(m+2)} = \frac{m+1}{m+2}$$

Vi skriver högerledet på samma nämnare:

$$\frac{m(m+2)+1}{(m+1)(m+2)} = \frac{(m+1)(m+1)}{(m+1)(m+2)}$$

Förenkla uttrycken i täljarna så ser vi att:

$$\frac{m^2+2m+1}{(m+1)(m+2)} = \frac{m^2+2m+1}{(m+1)(m+2)}$$

Uttrycken i båda led är exakt likadana, så vi har visat att formeln stämmer för alla $n \geq 1$.

SUMMATECKNET

Summan $\frac{1}{1*2} + \frac{1}{2*3} + \frac{1}{3*4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$ kan också skrivas med summatecknet:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}$$

Termen till höger om summatecknet antar först värdet $i = 1$ som är skriven under summatecknet. Sedan adderas en ny likadan term med värdet $i = 2$, sedan $i = 3$ och så vidare upp till $i = n$ som står ovanför summatecknet.

Därför hade uppgiften kunna formulerats till att bevisa likheten:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Några andra exempel på summor:

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{i} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

$$\sum_{i=0}^{5} i^2 = 0 + 1 + 4 + 9 + 16 + 25$$

Här låter vi alltid i beteckna den variabel som förändras mellan varje term. Men precis som i ekvationer kan vi döpa den till vad som helst.

BEVISA OLIKHETER

Vi tar ett annat exempel.

<u>Exempel:</u> Bevisa att $n^2 < 2^n$ för $n \geq 5$.

1. För $n = 5$ ser vi att $5^2 < 2^5$ stämmer eftersom $25 < 32$.
2. Anta att olikheten gäller för $n = m$: $m^2 < 2^m$

3. Låt oss nu titta på $(m+1)^2 < 2^{m+1}$

Olikheten kan med kvadreringsregeln och potensreglerna utvecklas som

$$m^2 + 2m + 1 < 2 * 2^m$$

Enligt induktionshypotesen gäller att $m^2 < 2^m$. Vi byter ut vårt uttryck på det viset.

$$m^2 + 2m + 1 < 2 * m^2$$

Vi subtraherar med m^2 och kastar om i olikheten för att få:

$$2m + 1 < m^2$$

$$m^2 - 2m - 1 > 0$$

Vänsterledet kan kvadratkompletteras till:

$$(m-1)^2 - 2 > 0$$

$$(m-1)^2 > 2$$

Vänsterledet är en exponentiell funktion som stämmer för $m = 3$ och sedan bara växer, medan högerledet är konstant. Med andra ord är denna ekvation giltig för alla $m \geq 3$ vilket, tillsammans med induktionsbasen $n = 5$ gör att den ursprungliga formeln gäller för alla $n \geq 5$.

Tidigare nämndes det att antalet delmängder till en mängd av ordning n är precis 2^n. Detta bevisades i avsnittet om kombinatorik men kan också bevisas med hjälp av ett induktionsbevis. Detta är ett mer tekniskt bevis, men för den intresserade går det att läsa här:

http://www.proofwiki.org/wiki/Sum_of_Binomial_Coefficients_for_Given_n/Proof_1

Nu lämnar vi talteorin och bevisföringen och kommer till det sista kapitlet, med något mycket mer visuellt och handgripligt. Grafer!

GRAFTEORI

Begreppet graf, olika typer av grafer och dess egenskaper samt några kända grafteoretiska problem.

I detta avslutande kapitel ska vi titta lite ytligt på grafteori, vilket inte är detsamma som grafer av funktioner.

TVÅ MÄNGDER BILDAR EN GRAF

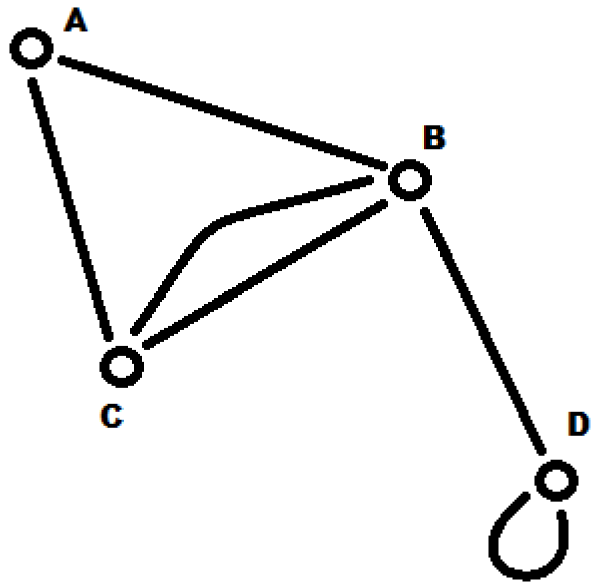
Med en graf kommer vi inte längre tala om grafen av en funktion, utan istället om två mängder:

$$V = mängden\ \boldsymbol{noder}\ (vertices)$$

$$E = mängden\ av\ \boldsymbol{kanter}\ \ (edges)$$

Terminologin är inte helt entydig på engelska och därmed ofta oklar på svenska. Jag försöker hålla mig så konsekvent som möjligt, men varnar för att andra ord kan förekomma i andra texter. Noder kallas också ***punkter*** eller ***hörn***. Kanter kallas också ***bågar***.

Kanterna binder ihop noderna på till exempel detta vis:

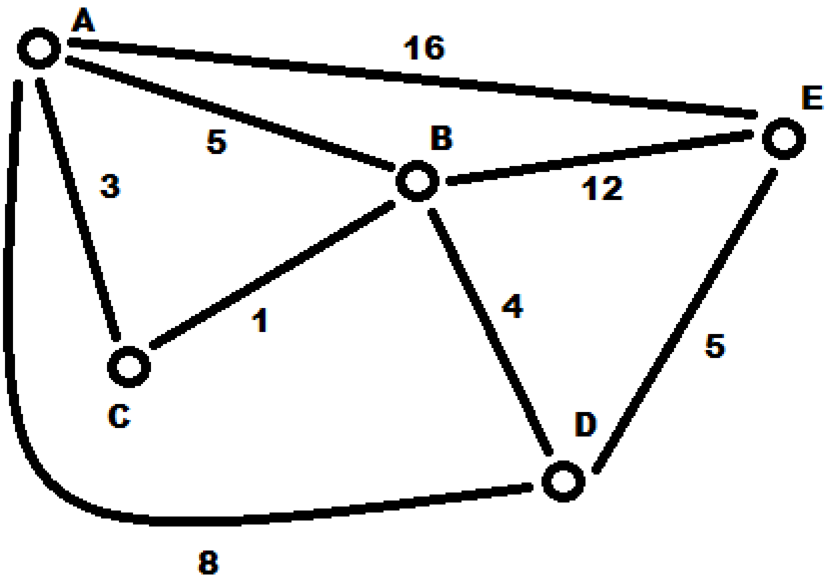


I ovanstående bild är A, B, C och D noder med totalt sex kanter. Ofta förbjuder vi mer än en kant mellan två noder (såsom mellan B och C ovan) men även detta kan förekomma. Vi talar då om en ***multigraf***.

En kant går från D tillbaka sig själv. Detta kallas en ***loop***.

I verkligheten kan noderna till exempel representera städer och kanterna är vägar mellan dem. Kanterna kan få olika värden (avståndet mellan städerna) och ett intressant, men mycket svårt, problem är att hitta kortaste avståndet (minsta summan) mellan två punkter.

Vi tar ett exempel på detta. Fem städer A, B, C, D, E är sammanbundna av dessa vägar:



Varje kant har tilldelats ett värde som kan sägas representera avståndet mellan två städer. Talen kallas ***vikter***. Vilket är kortaste avståndet från stad C till stad E?

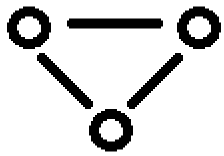
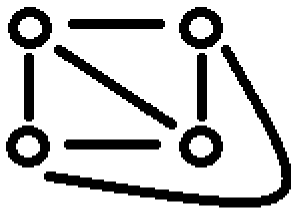
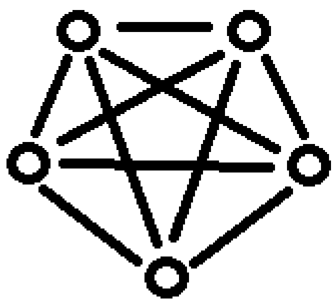
Det enklaste kan tyckas vara vägen C-B-E som har total längd $1 + 12 = 13$. Men det går att göra bättre.

Väg C-B-D-E inkluderar fler städer men är bara $1 + 4 + 5 = 10$ enheter lång.

För att få våra GPS-enheter och onlinekarttjänster att fungera måste datorer kunna räkna både riktigt och snabbt på dessa typer av problem. Med tusentals noder och miljoner kanter blir beräkningarna mycket tidskrävande med ineffektiva metoder.

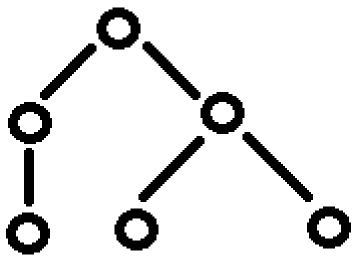
OLIKA TYPER AV GRAFER

Med K_n menas en graf med n noder där alla par av noder är sammanbundna med en kant.

K_1	
K_2	
K_3	
K_4	
K_5	

Graf K_1 till och med K_4 är ***planära***, det vill säga de kan ritas upp utan att två kanter skär varandra. Från och med K_5 är det omöjligt. K_5 är en ***icke-planär graf***.

Ett ***träd*** är en graf utan cykler, det vill säga det går inte att gå från en nod A tillbaka till A utan att gå över någon kant minst två gånger.

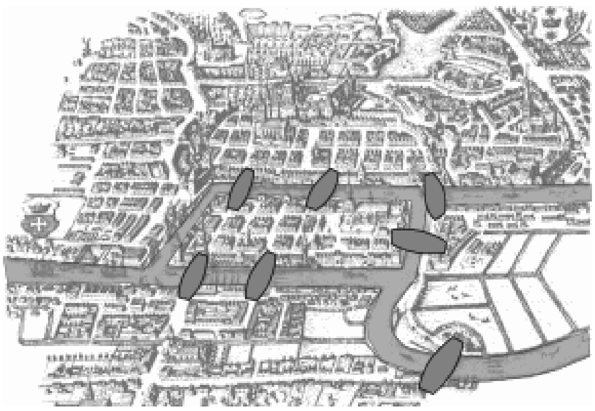


Ovanför är ett exempel på ett träd. Tänk på sannolikhetsträd!

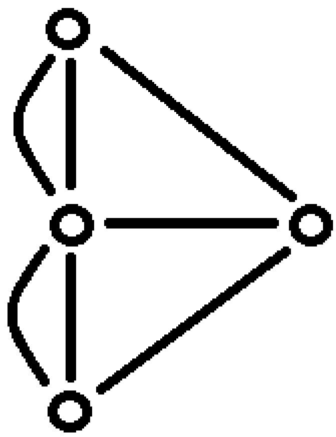
GRAFTEORETISKA PROBLEM

Grafteorin härstammar från matematiken Leonhard Euler som undersökte problemet med vad som idag är känt som ***Königsbergs sju broar***.

Den gamla staden Königsberg (idag Kaliningrad) bestod av fyra stadsdelar avskiljda med vatten och dessa var sammankopplade med sju broar.



Frågan löd: **Är det möjligt att påbörja en promenad, korsa varje bro precis en gång och sedan vara tillbaka vid ursprungsplatsen?** Euler insåg att det inte spelar någon roll hur resten av staden ser ut eller hur långt det är mellan broarna, det viktiga är hur broarna förhåller sig till varandra. De fyra landmassorna kan ritas som en graf:

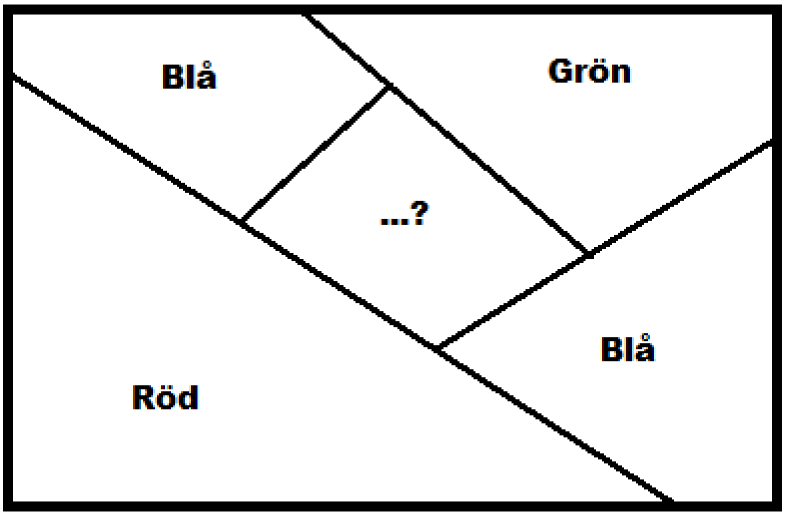


Med denna insikt lade Euler grunden till grafteorin såsom vi känner till den idag.

Det önskade promenadstråket visade sig vara omöjligt. Euler bevisade att en sådan promenad där alla broar (kanter) måste passeras (idag kallad ***Eulerväg***) kräver ett sätt att lämna en nod för varje sätt att nå den. Med andra ord måste varje nod sitta ihop med ett jämnt antal kanter (förutom möjligtvis de noder som är start och slut). Ett sätt att göra detta på som dessutom slutar där promenaden började kallas en ***Eulerkrets***. I ovanstående graf finns det ingen nod alls som sitter ihop med ett jämnt antal kanter. Alltså existerar ingen Eulerkrets.

Ett annat känt grafteoretiskt problem är ***fyrfärgsproblemet***. Tänk dig en världskarta med alla länder. Hur många färger måste användas för att kunna färga varje land på ett sådant sätt att inga två gränsande länder har samma färg?

Det är lätt att visa att det absolut inte går med tre färger:



”Landet” i mitten gränsar till alla de tre färgerna röd, blå och grön och får alltså inte ha den färgen själv. Men räcker det alltid med fyra färger? Svaret visade sig vara ”Ja” och bevisades så sent som 1976 med hjälp av mycket avancerad grafteori och datorsimuleringar.

Svaret kan också uttryckas mer generellt: Ingen planär graf behöver mer än fyra färger för att undvika att två sammankopplade noder ska ha samma färg.

Detta avslutar texten. Hoppas du fann den intressant och känner dig mer förberedd inför matte 5! I övrigt rekommenderar jag att du letar upp en gammal kursbok från gymnasiekursen ”Matematik diskret” eftersom det ännu inte finns några kursböcker för Matematik 5.